

# Construcción y exploración de retículos teóricos de modelos cosmológicos\*

Construction and Exploration of Theoretical Lattices  
of Cosmological Models

Mariana Espinosa-Aldama<sup>†</sup>

Omar López-Cruz<sup>‡</sup>

Eduardo Robles Belmont<sup>§\*\*</sup>

## Resumen

Ejemplificamos una serie de cuestiones clave en la construcción de retículos teóricos a partir del caso de la cosmología física relativista de la primera mitad del siglo XX. Siguiendo el marco del estructuralismo metateórico, clasificamos distintos modelos cosmológicos que comparten atributos multivaluados, y aplicamos las metodologías del análisis de conceptos formales (FCA) para representar sus relaciones semánticas. Nuestro objetivo es ampliar el mapa conceptual publicado en la página *Exploratorium de teorías del espacio-tiempo*, generando representaciones que apoyen tanto el estudio de la cosmología física como la investigación epistemológica sobre las teorías científicas. Discutimos las definiciones de las relaciones de especialización y teorización vistas desde el FCA, decisiones de escalamiento, aproximaciones históricas vs. cristalizadas en la construcción de contextos, así como el uso de herramientas de inteligencia artificial para la exploración de atributos.

*Palabras clave:* análisis de conceptos formales - estructuralismo metateórico - exploración conceptual - modelos cosmológicos - retículos teóricos

## Abstract

We illustrate a series of key issues in the construction of theoretical-lattices through the case of relativistic physical cosmology in the first half of the twentieth century. Following the framework of metatheoretical structuralism, we classify various cosmological models that share multivalued attributes, and apply the methodologies of Formal Concept Analysis (FCA) to represent their semantic relations. Our aim is to expand the conceptual map published on the website *Exploratorium of space-time theories*, generating representations that support both the study of physical cosmology and epistemological research on scientific theories. We discuss the definition of a specialization relation and a theorization relation from the perspective of FCA, scaling decisions, historical versus crystallized approaches to context construction, and the use of artificial intelligence tools for attribute exploration.

*Keywords:* formal concept analysis - metatheoretic structuralism - conceptual exploration - cosmological models - theoretical lattices

---

\* Recibido: 18 de enero de 2026. Aceptado con revisiones: 30 de abril de 2026.

<sup>†</sup> Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, SECIHTI. Para contactar al autor, por favor, escribir a: mariana.espinosa@iimas.unam.mx.

<sup>‡</sup> Instituto de Astrofísica, Óptica y Electrónica, México. Para contactar al autor, por favor, escribir a: omarlx@inaoep.mx.

<sup>§</sup> Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México. Para contactar al autor, por favor, escribir a: eduardo.robles@iimas.unam.mx.

\*\* Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo del IIMAS-UNAM) y de la SECIHTI, a través del programa Estancias Posdoctorales por México Convocatoria 2023(1) con la solicitud No. 5991306, CVU: 232297, bajo la supervisión del Dr. Eduardo Robles Belmont y con el apoyo del proyecto UNAM-PAPIIT IN302623.

*Metatheoria* 16(2)(2026): 31-62. ISSN 1853-2322. eISSN 1853-2330.

© Editorial de la Universidad Nacional de Tres de Febrero.

© Editorial de la Universidad Nacional de Quilmes.

Publicado en la República Argentina.

## 1. Introducción

La teoría cosmológica relativista desarrollada entre 1917 y finales de los años treinta por Albert Einstein, Willem de-Sitter, Alexander Friedmann, George Lemaître, Richard Tolman, Howard Robertson y Arthur Walker, se presenta como caso de estudio con el que ilustramos múltiples consideraciones en la construcción de contextos formales y en el análisis de retículos teóricos. La metodología propuesta parte de la identificación de ciertos modelos cosmológicos y sus atributos, descritos en artículos seminales. Los objetos y atributos se disponen en tablas de incidencia llamadas contextos formales a partir de los cuales extraemos retículos conceptuales. Estos atributos incluyen axiomas del tipo ecuacional, dominios de aplicación, parámetros y condiciones específicas, formulados en el marco de la teoría relativista. Nos guiamos por la tipificación de axiomas y clases de modelos propia del estructuralismo metateórico (Balzer, Moulines & Sneed 2012, Moulines 1985), una corriente de la filosofía de la ciencia que adopta una perspectiva semanticista y modelo-teórica, compatible con las herramientas del *Análisis de Conceptos Formales* (FCA, por sus siglas en inglés).

El FCA es una teoría de la matemática aplicada que formaliza la noción de concepto dentro de un contexto formal mediante la conexión de Galois, apoyándose en la teoría de retículos de Birkhoff para organizar jerárquicamente los conceptos parcialmente ordenados y presentarlos en forma reticular. A partir de los contextos formales, los algoritmos del FCA generan redes conceptuales estructuradas y derivan implicaciones lógicas entre conjuntos de atributos. Los diagramas resultantes son informativos, sintéticos y útiles para comprender la composición y desarrollo de la estructura interna de las teorías físicas.

En este texto, tras presentar brevemente la metodología del análisis de conceptos formales y el marco teórico del estructuralismo metateórico, discutiremos los dilemas encontrados y las decisiones tomadas en relación con la construcción de contextos formales de teorías físicas. Veremos la aproximación histórica *vs* la cristalizada, la naturaleza de los datos, la selección de objetos y atributos, el escalamiento y modo de construcción aditivo o sustractivo. Comentamos sobre el uso de software especializado para la visualización y exploración de las redes (Exploratorium y Concept Explorer y ChatGPT)<sup>1,2,3</sup> como herramientas clave en esta investigación, resaltando su contribución en la consulta y validación de implicaciones. Finalmente, presentamos los resultados obtenidos, incluyendo los retículos conceptuales finales y las implicaciones teóricas derivadas del análisis.

## 2. FCA como herramienta para estructurar jerarquías conceptuales

El FCA es una teoría matemática desarrollada desde los años ochenta por Rudolf Wille, Bernhard Ganter y su grupo, en la Universidad Técnica de Darmstadt, Alemania. Su estudio se ha extendido significativamente en Europa, y está relacionado con campos sobre conocimiento conceptual, razonamiento formal cognitivo, ontología aplicada, teoría de categorías, minería de datos, teoría de grafos, aprendizaje automático (*machine learning*), etc. (Ganter & Wille 1999, Ganter & Stumme 2002, Ganter, Stumme & Wille 2003, Priss 2007, Singh, Cherukuri & Gani 2016).

El objetivo principal del FCA es representar y analizar estructuras conceptuales a partir de datos organizados en una tabla de incidencia, conocida como *contexto formal*  $(G, M, i)$ , donde  $G$  es un conjunto de objetos,  $M$  es un conjunto de atributos e  $i$  es la relación de incidencia. A partir de esta tabla, se definen los *conceptos formales* como pares ordenados  $\langle A, B \rangle$  formados por una *extensión*  $A \subseteq G$  (el subconjunto de objetos que comparten ciertos atributos) y una *intensión*  $B \subseteq M$  (el subconjunto de atributos comunes a  $A$ ). Esta definición se fundamenta en la aplicación de una conexión de Galois, lo que permite traducir la teoría de retículos de Birkhoff (1940) en una herramienta aplicada de amplio alcance.

<sup>1</sup> <https://github.com/vuyu1974/Exploratorium/>

<sup>2</sup> <https://conexp.sourceforge.net/>

<sup>3</sup> OpenAI, ChatGPT, 2023

Los *retículos conceptuales* resultantes son estructuras jerárquicas que organizan los conceptos formales según relaciones de cobertura, y tienen la particularidad de que, para cualquier par de nodos, existe solamente un solo nodo ínfimo y uno supremo. Estas estructuras pueden visualizarse como redes jerárquicas, etiquetadas e interactivas mediante software especializado como *Concept Explorer* (conexp 1.3), que automatiza el análisis del contexto formal, visualiza redes, etiqueta atributos y objetos, señala subconceptos y supra-conceptos, y calcula implicaciones lógicas y reglas de asociación entre atributos. Más allá de lo que podamos mostrar en tan poco espacio, el FCA ofrece un marco sistemático para el análisis estructural y semántico de contextos formales y retículos conceptuales.

La conexión de Galois permite identificar las intensiones y extensiones que conforman los conceptos. Es una operación (identificada mediante las comillas simples') donde  $A'$  nos lleva de un subconjunto de objetos  $A \subseteq G$  al subconjunto de atributos  $A' = B \subseteq M$  propios de los elementos de  $A$ ; y en sentido inverso,  $B'$  conecta un subconjunto de atributos  $B \subseteq M$  a un subconjunto de objetos  $B' = A \subseteq G$ . Si es el caso que  $A = A''$ , o  $B = B''$  entonces  $\langle A, B \rangle$  es un concepto formal del contexto  $(G, M, i)$ . donde  $B$  es la intensión y  $A$  es la extensión del concepto.  $\langle A'', A' \rangle$  y  $\langle B', B'' \rangle$  son siempre conceptos formales. De manera que en un contexto formal podemos encontrar varios conceptos formales  $\langle A_1, B_1 \rangle, \langle A_2, B_2 \rangle, \dots, \langle A_n, B_n \rangle$  dentro del conjunto potencia de pares ordenados del contexto  $(G, M, i)$ .

Los conceptos formales se ordenan jerárquicamente al comparar sus intensiones y extensiones.

$$(1) \quad \langle B_i \subseteq B_j \rangle \Leftrightarrow \langle A_i, B_i \rangle \geq \langle A_j, B_j \rangle \Leftrightarrow \langle A_i \supseteq A_j \rangle.$$

Se dice que un concepto es supra-concepto de otro concepto si los atributos del primero están contenidos en el conjunto de atributos del segundo; o si el conjunto de objetos del segundo está contenido en el conjunto de objetos del primero. Esta relación entre subconcepto y supra-concepto también es conocida como relación de cobertura.

Una vez conformado el contexto se procede a cargar la tabla en algún software especializado como conexp-1.3 o por paquetería de *R* o *Python* que podrán dibujar las redes producidas por dichas relaciones jerárquicas y analizar las implicaciones encontradas.

### 3. Compatibilidad entre FCA y el estructuralismo metateórico

En este trabajo, los objetos  $g \subseteq G$  son los modelos que conforman una teoría y los atributos están dados por los axiomas o premisas  $m \subseteq M$  que conforman los modelos (en este caso modelos cosmológicos). La relación de incidencia  $i$  se da si es el caso que  $m$  es un axioma de  $g$ . Los atributos y sus etiquetas representan premisas que definen dominios y sus tipificaciones, describen relaciones (principios de acción mínima, ecuaciones de campo, de movimiento o de estado), condiciones, parámetros, elementos distinguidos, aplicaciones intencionales, ligaduras, etc. Estos atributos son compartidos por distintas clases de modelos que son definidos bajo el marco teórico del estructuralismo metateórico.

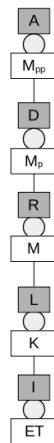
El estructuralismo metateórico es una corriente de la filosofía de la ciencia que estudia la estructura interna de las teorías científicas mediante la caracterización de sus modelos y sus relaciones interteóricas e intrateóricas, apoyándose en la teoría de conjuntos y los predicados conjuntistas (Balzer, Moulines & Sneed 2012, Moulines 1982a, Balzer, Moulines & Sneed 2000, Abreu, Lorenzano & Moulines 2013).<sup>4</sup> Distintos conjuntos de ciertas clases de axiomas conforman distintas clases de modelos: modelos potenciales, actuales, parciales y especializados que se encuentran relacionados mediante condiciones de ligaduras, vínculos, relaciones de especialización, teorización, etc. En física, los modelos potenciales parciales ( $M_{pp}$ ) –que también pueden llamarse modelos previos por encontrarse en las redes teóricas en niveles superiores a los modelos potenciales y actuales– suelen estar compuestos por conceptos más básicos como las estructuras de espacio y tiempo, las propiedades geométricas y topológicas, los principios fundamentales (zerológicos) y las teorías matemáticas subyacentes que conforman la profísica (Bunge 1967, Moulines 1982b).

<sup>4</sup> Aunque hay trabajos estructuralistas que se apoyan en la teoría de categorías.

Los modelos potenciales ( $M_p$ ) agregan caracterizaciones de nuevos dominios teóricos y parámetros empíricos, como la masa, la fuerza y las constantes fundamentales. Los modelos actuales ( $M$ ) describen relaciones específicas entre dominios y las condiciones bajo las cuales estas relaciones se mantienen. Finalmente, los modelos especializados ( $M_{pp}$ ) refinan aún más estas relaciones incorporando condiciones más específicas, leyes de fuerza o datos empíricos dentro del marco de las mismas leyes generales. Más allá de este núcleo formal  $K = \langle M_p, M, M_{pp}, L \rangle$ , el estructuralismo caracteriza e incorpora las aplicaciones intencionales ( $I$ ), los datos históricos ( $H$ ) y la comunidad científica ( $CC$ ) en el llamado elemento-teórico ( $ET$ ), la segunda unidad de análisis:

$$ET = \langle K, I, H, CC \rangle$$

Generalmente se trabaja con versiones simplificadas de  $ET$  omitiendo  $L$ ,  $I$ ,  $H$  y/o  $CC$  para centrarse en el núcleo formal  $K$ . La Figura 1 muestra la representación reticular de un elemento teórico  $ET = \langle K, I \rangle$  con un patrón o *motif* en que como hipótesis inicial representamos en forma de cadena. Más adelante veremos si esto se cumple, pero suponemos que en el caso de las teorías geometrizadas como la relatividad general, y en la aproximación riemanniana esto es así. La lectura de los retículos es siempre vertical. Los nodos representan conceptos y las ligas son relaciones de cobertura. Las etiquetas superiores (grises) indican atributos y las etiquetas inferiores (blancas) indican objetos. Los objetos tienen todos los atributos que se encuentren hacia arriba, mientras que un atributo es poseído por todo objeto que se encuentre en algún nodo inferior, siempre siguiendo las líneas en dirección vertical.



**Figura 1.** Retículo tipo cadena que representa un elemento teórico simplificado ( $CC$  y  $H$  no han sido incluidos). Las etiquetas grises indican atributos (axiomas), y las etiquetas blancas indican objetos (modelos), donde  $A$  es un conjunto de axiomas,  $D$  es un conjunto de dominios,  $R$  es un conjunto de ecuaciones sintéticas,  $L$  es un conjunto de vínculos e  $I$  es un conjunto de aplicaciones intencionales. Los objetos cuentan con todos los atributos que se localizan arriba de los mismos. Un atributo es poseído por todo objeto que se encuentre debajo del mismo.

En el estructuralismo metateórico los modelos y los elementos teóricos se relacionan entre sí mediante relaciones de especialización y teorización, conformando lo que se conoce como redes teóricas, la tercera unidad de análisis. La relación de especialización que vamos a definir aquí es distinta a la descrita en *Una Arquitectónica para la ciencia*, libro icónico del estructuralismo, pues es nuestro parecer que en su tratamiento hay una confusión respecto a la direccionalidad de la relación. Esto puede deberse a que en ocasiones se piensa en los modelos como su parte extensional y en otras como su parte intensional. Al definir las clases de modelos como conceptos formales veremos que dichas confusiones desaparecen.

La definición original encontrada en Balzer, Moulines & Sneed (2012, pp. 169-170) dice, en pocas palabras, que  $ET^*$  es una especialización de  $ET$ : ( $ET^* \sigma ET$ ) si y solo si  $M_p^* = M_p$ ,  $M_{pp}^* = M_{pp}$ ,  $M^* \subseteq M$ , e  $I^* \subseteq I$ . Veamos si esto es cierto:

Sean  $ET = (M_p, M, M_{pp}, I)$  y  $ET^* = (M_p^*, M^*, M_{pp}^*, I^*)$  dos elementos teóricos que comparten los mismos modelos potenciales:  $M_{pp} = M_{pp}^* = (D_1, R_1, A_1)$ ,  $M_p = M_p^* = (D_1, R_1, A_1, D_2)$ , donde  $D_1$  es un conjunto de dominios,  $R_1$  es un conjunto de relaciones muy básicas,  $A_1$  un conjunto de axiomas. El modelo actual  $M^*$  contiene además de las leyes fundamentales  $R_2$ , ciertas leyes especializadas  $R_3$  y/o constricciones particulares  $C$ . Ejemplos típicos de elementos teóricos reconocidos como especializaciones de la Mecánica Clásica de Partículas son la Mecánica Gravitacional o la Mecánica de Hooke que asumen, además de las leyes de Newton, la ley Universal o la Ley de Hooke. La relación entre las clases de modelos actuales es la siguiente:

$$M = (D_1, R_1, A_1, D_2, R_2) \subseteq (D_1, R_1, A_1, D_2, R_2, R_3, C) = M^*$$

Cuando éste sea el caso llamaremos  $M^* = M_e$  un modelo especializado de la teoría  $T$ .

Para aclarar esta situación con más detalle obtenemos los conceptos formales correspondientes a partir de un contexto formal que contiene los modelos de los dos elementos teóricos y sus atributos:

Los conceptos formales obtenidos para los modelos sin estrella y el modelo especializado son:

$$C(M_{pp}(T)) = \langle (M_{pp}, M_p, M, M_e, ET, ET^*), (D_1, R_1, A_1) \rangle$$

$$C(M_p(T)) = \langle (M_p, M, M_e, ET, ET^*), (D_1, R_1, A_1, D_2) \rangle$$

$$C(M(T)) = \langle (M, M_e, ET, ET^*), (D_1, R_1, A_1, D_2, R_2) \rangle$$

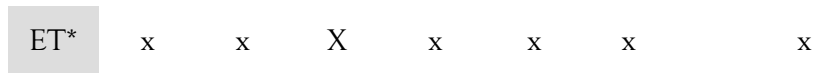
$$C(M_e(T)) = \langle (M_e, ET^*), (D_1, R_1, A_1, D_2, R_2, R_3, C) \rangle.$$

Si observamos las relaciones entre las intensiones y las extensiones de  $C(M(T))$  y  $C(M_e(T))$  veremos que las extensiones contienen el objeto  $ET^*$ . Esto se debe a que los conceptos formales son dependientes del contexto formal, es decir, los conceptos son obtenidos a partir de la tabla de incidencia y nos dice de antemano que  $ET^*$  está contenido en la extensión de los modelos de  $ET$  dados sus atributos.

$$Ext(C(M(T))) = (M, M_e, ET, ET^*) \supseteq (M_e, ET^*) = Ext(C(M^*(T)))$$

$$Int(C(M(T))) = M \subseteq M_e = Int(C(M^*(T)))$$

	A	D	R	R <sub>e1</sub>	C <sub>1</sub>	L	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>
M <sub>pp</sub>	x							
M <sub>p</sub>	x	x						
M	x	x	X					
K	x	x	X			x		
ET	x	x	X			x	x	x
M <sub>pp</sub> <sup>*</sup>	x							
M <sub>p</sub> <sup>*</sup>	x	x						
M <sub>e</sub>	x	x	X	x	x			
K <sup>*</sup>	x	x	X	x	x	x		



**Cuadro 1.** Contexto formal para dos elementos teóricos donde  $ET^* \sigma ET$ .

Siguiendo la fórmula 1 (Sec. 2), podemos decir que existe una relación de cobertura tipo especialización entre  $M$  y  $M_e$ :  $C(M(T)) \geq C(M_e(T))$ , en donde no queda duda de qué parte (la intensional o la extensional) es la que se está comparando, y que nos ha resultado opuesta a lo expresado en Balzer, Moulines & Sneed (2012, p. 170).

La relación de teorización se da entre los modelos potenciales y también se le encuentra en las redes teóricas, como se ejemplifica en la Fig. 2b,  $T^*$  es una teorización de  $T$  ( $T^* \tau T$ ) si y solo si  $M_{pp} = M^*_{pp}$ ,  $M_p \subseteq M^*_p$ ,  $M \subseteq M^*$ , e  $I \supseteq I^*$ . Esta relación se encuentra descrita en Díez & Moulines (2008, p. 372), pero también difiere en la direccionalidad de la relación. La teorización también es contextual. Un dominio puede ser nuevo o no, según los elementos teóricos que se comparen. Si se considera que cierto dominio tiene un origen previo al que figura en cierto retículo, en el contexto deberá añadirse el correspondiente modelo potencial parcial para que pueda ser comparado.

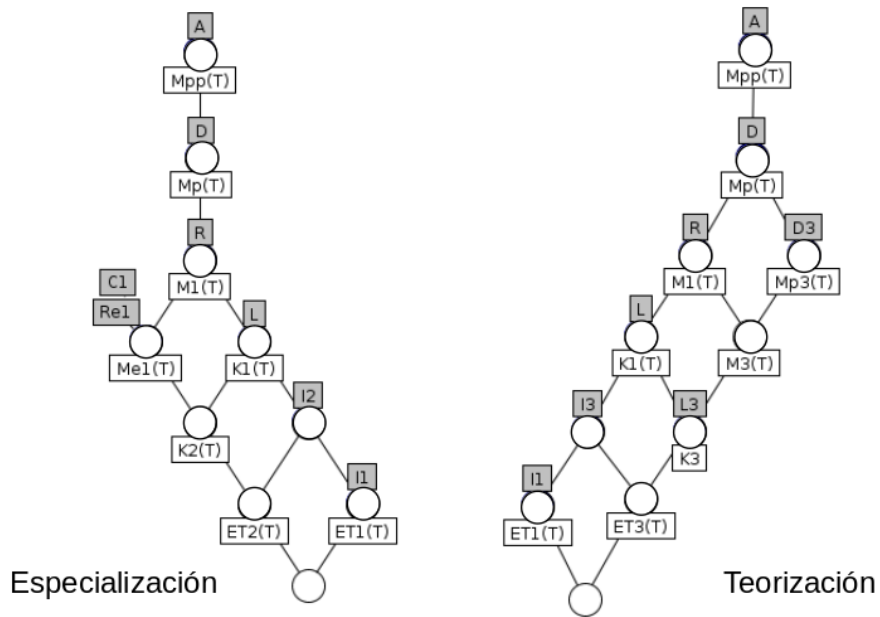
Debemos señalar que también estamos considerando como teorizaciones aquellas relaciones de cobertura en las que el modelo primado contiene los llamados elementos distinguidos. Es decir, cuando se agrega una nueva constante fundamental como puede ser la constante de gravitación o la carga del electrón hay un dato adicional en el modelo potencial primado que nos impone la Naturaleza. Otros ejemplos de elementos distinguidos son los elementos neutros (como el 0 en la suma y el 1 en la multiplicación en el caso de modelos matemáticos).

En el caso de la red teórica de la Mecánica Clásica de Partículas descrita en el *Architectonic*, supuestamente conformada solamente por relaciones de especialización, encontramos varias relaciones de teorización, dado que varios elementos distinguidos aparecen en los niveles inferiores al nodo correspondiente al modelo actual en el cual se encuentra la segunda ley de Newton; pero además, encontramos un nodo extra tipo concepto atributo en donde aparece la etiqueta correspondiente a la fuerza entre partículas  $F^i: \Sigma \times \Sigma \times K \times E^3 \times T$  la cual tiene una estructura distinta a la fuerza externa o aplicada  $F^e: \Sigma \times K \times E^3 \times T$  (véase Bunge 1967, p. 130). La Figura 3 muestra un retículo teórico conformando por un elemento teórico, uno especializado, y una teorización. Con el fin de facilitar su lectura hemos resumido los atributos en una sola etiqueta que identifica los atributos nuevos característicos de cada clase de modelo.

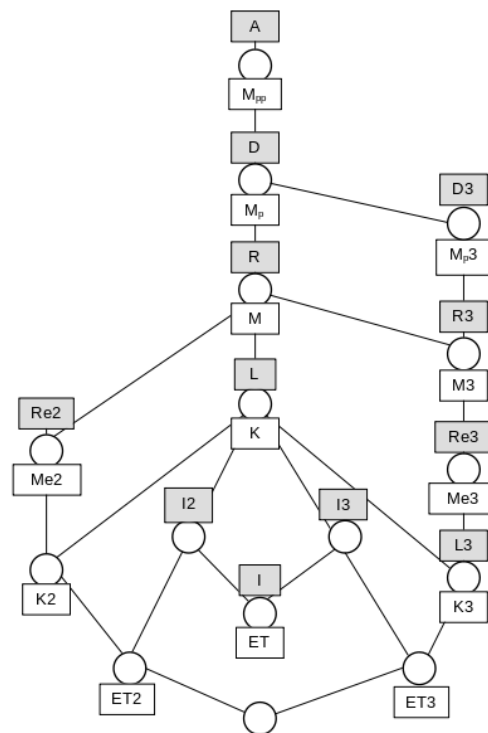
También notamos que la relación entre aplicaciones intencionales es opuesta a la de los modelos actuales:  $I = (I_1, \dots, I_n) \supseteq I_1 = I^*$ . Los modelos especializados tienen un campo de aplicación más restringido que los modelos actuales. Por ejemplo, la Teoría de la Relatividad General tiene varias aplicaciones, una de ellas el estudio del Universo como un todo; otras, el estudio de los agujeros negros o la geolocalización mediante GPS. Todos los modelos cosmológicos aquí descritos tienen en común la intención de ser aplicados al estudio del Universo mismo y determinar su forma, temporalidad y dinámica. Siendo un atributo común a todos los modelos cosmológicos, en muchas ocasiones el atributo es omitido, obviado u olvidado, en cuyos casos puede resultar interesante identificarlos, recuperarlos y analizarlos.

La comunidad científica CC está identificada por los autores de los artículos seminales seleccionados, y los datos históricos estarán dados por las fechas de publicación de los artículos seminales. Estos datos los hemos asociado a las etiquetas de los objetos. Nuestra versión simplificada no incluye las ligaduras y vínculos entre modelos.

Las Figuras 2a y 2b muestran los patrones o *motifs* correspondientes a dos elementos teóricos relacionados por especialización y teorización, y que pueden describirse en su parte superior como cadenas, en su parte media como subretículos booleanos cuadrados, y en su parte baja como anticadenas de tamaño 2. La estructura total puede describirse como un retículo tipo árbol embebido en un intervalo booleano de cuadrados.



**Figura 2a y 2b.** El diagrama del lado izquierdo muestra las relaciones conceptuales entre dos elementos teóricos  $ET_1(T)$  y  $ET_2(T)$  donde  $ET_2(T)$  es una especialización de  $ET_1(T)$ . El diagrama del lado derecho relaciona  $ET_1(T)$  con  $ET_3(T)$ , donde  $ET_3(T)$  es una teorización de  $ET_1(T)$ . Aquí,  $A$  es un conjunto de axiomas,  $D$  es un conjunto de dominios,  $R$  es un conjunto de relaciones sintéticas,  $C$  es un conjunto de constricciones,  $Re$  es un conjunto de relaciones especializadas,  $L$  es un conjunto de ligaduras y vínculos,  $I$  es un conjunto de aplicaciones intensionales. El numeral indica a qué elemento teórico se corresponde. En el caso de la especialización, podemos observar que, si no tomamos en cuenta  $L$  e  $I$ , por ejemplo, si todos los modelos actuales tienen las mismas aplicaciones intensionales y las mismas ligaduras, entonces los nodos inferiores, correspondientes a  $ET_1(T)$ ,  $ET_2(T)$ ,  $K_1(T)$ ,  $K_2(T)$  y  $L_2$  se colapsarían en un solo nodo ínfimo y la relación de especialización queda bien localizada en la liga entre  $M(T)$  y  $Me_1(T)$  (véase el ejemplo en la Fig. 4).



**Figura 3.** Tres elementos teóricos se comparan en este retículo, donde  $ET_2(T)$  es una especialización de  $ET(T)$ , mientras que  $ET_3(T)$  es una teorización de  $ET(T)$ . Las clases de modelos y los núcleos teóricos también son objetos en esta red. Las etiquetas en gris indican atributos donde  $A$ : axiomas de  $M_{pp}(T)$  donde se incluyen dominios y relaciones básicas y otras premisas;  $D_i$ : nuevos dominios que caracterizan el  $M_{pi}$ ;  $R_i$ : relaciones entre los dominios (tanto de  $M_{pp}(T)$  como de  $M_p(T)$ ;  $I_i$ : aplicaciones intencionales.  $K_3$  cuenta con una ligadura adicional  $L_3$  a las que poseen  $K_2$  y  $K$ .

Los modelos descritos por los físicos en los textos seminales ejemplifican las clases de modelos actuales que son tomados como objetos de estudio. Los atributos corresponderán a los supuestos declarados por los autores al desarrollar teóricamente sus modelos. Puede ser que éstos no se encuentren expresados de forma axiomática ni conjuntista, pero pueden ser identificados primero grosso modo, y después afinándose su expresión exacta. Esto puede hacerse fácilmente dada la proximidad del tema con teorías conocidas y ya trabajadas como la relatividad general, la mecánica de partículas y los modelos de espacio-tiempo. Además, tenemos expectativas respecto al tipo de variables y premisas con las que nos vamos a encontrar. Las etiquetas asignadas son suficiente distintivo para una primera clasificación. Estudios más detallados en torno a algún concepto en particular podrán partir de este puerto, por ejemplo, el cambio en la interpretación del *Principio de Mach* o definiciones más precisas de homogeneidad e isotropía.

#### 4. Selección de objetos

La primera decisión consiste en determinar qué objetos comparar. Idealmente, nos gustaría estudiar una veintena de modelos representativos del siglo XX y XXI, como los mencionados en el libro de J. Peebles (2020, cap. 3) (véase también Longair 2006). Sin embargo, esta ambición inicial nos llevó rápidamente a redes demasiado complejas, densas, con resultados poco confiables que producían en la evaluación con inteligencia artificial contradicciones constantes (véase Sección 11), lo que nos forzó a regresar a los textos originales. Detectamos que los modelos clásicos presentados por autores contemporáneos no siempre corresponden con fidelidad a las formulaciones originales. La revisión de fuentes primarias permitió resolver contradicciones y a la vez ilustrar la evolución teórica del modelo clásico desde sus primeras versiones hasta sus formulaciones más estandarizadas. Estamos interesados tanto en la comparación estructural entre modelos como en el proceso de desarrollo de dichas estructuras.

Luminet (2014) divide la historia de la cosmología relativista en 6 periodos:

1. *Periodo inicial* (1917-1927), donde se trabajaron modelos teóricos relativistas con ausencia mínima información observacional.
2. *Periodo de desarrollo* (1927-1945), en el que se interpretaron las observaciones de corrimientos al rojo en el marco de las soluciones dinámicas de Friedmann-Lemaître y donde se investigaron los aspectos matemáticos y geométricos con mayor detalle.
3. *Periodo de consolidación* (1945-1965), durante el cual se incorporó el proceso de nucleosíntesis primordial de los elementos ligeros y se predijo la radiación de fondo cósmico.
4. *Periodo de aceptación* (1965-1980), durante el cual la teoría del Big Bang triunfa sobre la teoría del estado estacionario.
5. *Periodo de extensión* (1980-1998), cuando se incorporaron conocimientos provenientes de la física cuántica y de altas energías para describir el universo temprano.
6. *Periodo de alta precisión experimental* (1998-presente), cuando los parámetros fundamentales están siendo medidos con una alta precisión y surgen nuevas problemáticas como la energía oscura y la topología cósmica.

En este trabajo nos concentramos en los primeros dos periodos: el inicial y el de desarrollo (1917-1945), examinando los textos seminales de Einstein (1917), de-Sitter (1917), Tolman (1929), Friedmann (1922, 1924), Lemaître (1927), Milne (1933), McCrea y Milne (1934), Einstein y de-Sitter (1932), Robertson (1933) y Walker (1937) y siguiendo la historia detallada de este periodo que ofrecen Nussbaumer y Bieri en el libro *Discovering the Expanding Universe* (2009). Este corte también nos permite ilustrar con claridad algunas peculiaridades en la conformación de retículos teóricos y a la vez clarificar las diferencias conceptuales entre los modelos cosmológicos estudiados. Los objetos de nuestro contexto corresponden a los modelos actuales y potenciales trabajados en estos textos y que son identificados con el nombre del autor, la fecha de publicación y el número de caso tratado en dicho texto según la clasificación del mismo autor, lo que facilita su ubicación al consultar las fuentes.

Tras la publicación de la Relatividad General a finales de 1915 y principios de 1916, Einstein (1917) inaugura la cosmología física relativista aplicando su teoría al Universo mismo. Su mayor preocupación es lograr un universo eterno, estático, solventando las inconveniencias del modelo newtoniano. Para ello concibe un universo infinito pero cerrado, de curvatura esférica y homogéneo a gran escala, pero que resulta inestable pues tiende al colapso, por lo que incluye un término compensatorio regido por la constante cosmológica ( $\lambda$ ). Einstein incluso proveyó una fórmula para calcular el tamaño y masa total del Universo. Ese mismo año, de-Sitter encuentra otra solución a las ecuaciones de Einstein modelando un universo vacío, con  $\lambda > 0$ , formulado originalmente en coordenadas elípticas y encontrando una relación que predecía cierto corrimiento al rojo en el espectro de luz estelar, llamado corrimiento de de-Sitter. Friedmann (1922) introduce la posibilidad de un universo dinámico con un radio de curvatura variable en el tiempo, empleando coordenadas hiperesféricas. Friedmann (1924) explora modelos con curvatura negativa para discutir la finitud e infinitud del mundo. Tolman (1929) compara los elementos de línea y las soluciones estáticas de Einstein y de-Sitter, junto con otros espacios como Minkowski y Anti-deSitter (AdS), e introduce herramientas termodinámicas y consideraciones sobre la entropía, ampliando el repertorio físico de los modelos. Lemaître (1927) propone una coordinatización que separa el espacio y el tiempo, llevando las líneas de mundo a un punto pasado en común y derivando una relación distancia-velocidad que daría explicación a la ley empírica hallada por Hubble y Humason (1929). Robertson y Walker sistematizaron las condiciones de simetría –homogeneidad e isotropía– que caracterizan el espacio-tiempo FLRW. Robertson (1933) incorpora coordenadas comóviles y un tiempo cósmico. Milne y Walker exploran modelos inerciales. Milne y McCrea (1934) muestran la importancia de los postulados de homogeneidad e isotropía y la viabilidad de utilizar mecánica newtoniana para modelar escenarios cosmológicos. Einstein y de-Sitter (1932), al fin convencidos por la evidencia teórica y observacional proponen un universo en expansión, plano y sin constante cosmológica. Este modelo permaneció como base del modelo estándar hasta los años noventa cuando se descubrió la reciente expansión acelerada del Universo y la constante cosmológica fue reincorporada.

Nuestro corte temporal y teórico se da aquí, dejando fuera todos los aportes sucedidos durante la segunda mitad del siglo XX y principios del XXI, como fue la teoría del Big Bang, las teorías estacionarias de Hoyle, Bondi y Gold, la detección de la radiación cósmica de fondo, de los procesos de nucleosíntesis, la teoría de inflación, la física cuántica y de altas energías, la materia y energía oscura, los modelos con gravedad modificada, los universos de topologías multiconectadas, los multiversos y tanto más.

## 5. Selección y escalamiento de atributos

Los modelos cosmológicos pueden caracterizarse por diversos aspectos: la notación empleada en sus formulaciones, la presencia de ecuaciones sintéticas, de las variables y constantes fundamentales, por las condiciones particulares asumidas, los parámetros medibles, sus autores, etcétera. Es tentador construir redes que integren todos estos factores simultáneamente, pero ello conduce rápidamente a redes excesivamente complejas, donde se pierde claridad en la representación gráfica. Para afinar el análisis, es preferible construir los contextos de manera gradual, delimitando el corpus de estudio y el punto de comparación, e identificando rutas posibles de expansión.

Con respecto a las diversas formulaciones que se pueden encontrar, debemos identificar si estamos tratando con teorías basadas en principios fundamentales, como lo es de hecho la relatividad general, o en teorías constructivas como la teoría cinética de gases. Siguiendo a Read (2023), las primeras, toman principios fenomenológicos bien establecidos y los elevan a postulados para derivar mediante métodos analíticos constreñimientos que dictan cómo deben ser las ecuaciones dinámicas, proporcionando características generales de los procesos naturales. Los principios dan lugar a criterios matemáticos que los distintos procesos deben satisfacer. En cambio, las teorías constructivas intentan proveer una representación detallada de lo que sucede microscópicamente, de donde se puedan hacer predicciones de fenómenos observables. Se emplea un método sintético partiendo de hipótesis construidas. Quedamos en el entendido que los modelos cosmológicos están planteados sobre al menos dos teorías físicas basadas en principios: la relatividad general y la termodinámica.

Ahora bien, en el caso de la relatividad general, una teoría geometrizada, y en general las teorías del espacio-tiempo, nos encontramos con al menos dos formas para describir su geometría: la aproximación a la Klein y la aproximación riemanniana (véase Norton 1999). La aproximación dinámica o a la Klein caracteriza la geometría vía los grupos de invariancia de ciertas estructuras al sufrir transformaciones de coordenadas. Se especifica la clase de transformaciones de coordenadas que relacionan los marcos de referencia inerciales en la teoría a considerar, se identifican las estructuras y cantidades que son invariantes bajo dichas transformaciones y se les toma como características específicas de cada clase de espacio-tiempo. Así, Brown (2005) y Pooley (2013; 2017) reducen ontológicamente la estructura del espacio-tiempo a una expresión de simetrías de las leyes dinámicas de los cuerpos (los cuales son conceptualmente previos). Por otro lado, en la aproximación geométrica o riemanniana, la geometría se caracteriza vía tensores y otras estructuras geométricas y libres de coordenadas. El espacio-tiempo está representado por una variedad diferenciable cuyas propiedades geométricas y topológicas se van agregando a partir de la utilización de diversos objetos geométricos como lo es el tensor métrico  $g$ . La estructura del espacio-tiempo explica el comportamiento de la materia y las simetrías de las leyes asociadas. Ésta es la formulación que siguen Friedman (1993), Janssen (2009) y Lange (2007), que hemos seguido en trabajos previos (Espinosa 2022, 2023) y que tomaremos para estudiar los modelos cosmológicos.

Las dos ecuaciones de Friedmann-Lemaître relacionan los elementos necesarios para modelar un Universo dinámico, homogéneo e isotrópico: se derivan de la ecuación de Einstein que relaciona la curvatura del espacio-tiempo con la presencia de materia/energía, al seleccionar una métrica que da cuenta de un fluido perfecto. El principio cosmológico que supone homogeneidad en el espacio y hacia todas direcciones (isotropía), lleva a definir una métrica conocida como la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)(dr^2 + S_k^2(r)d\Omega^2)$$

donde el parámetro de curvatura puede tomar alguno de los tres valores  $k = -1, 0, 1$ , según se desee modelar un universo abierto, plano o cerrado; de manera que  $S_{-1}(r) = \sinh(r)$ ,  $S_0(r) = 1$ ,  $S_1(r) = \sin(r)$ . Al combinar estos elementos se obtienen dos ecuaciones independientes:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\lambda}{3}, \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

La primera ecuación relaciona la razón de expansión del radio del Universo  $R$  (el parámetro de Hubble  $H$ ) con la densidad de energía, la curvatura y la constante cosmológica. La segunda es una ecuación que describe cómo se acelera o desacelera la expansión del Universo dependiendo de la presión y densidad. En las ecuaciones de Friedmann encontramos las variables de presión ( $p$ ), densidad ( $\rho$ ), curvatura ( $k$ ) y la constante cosmológica ( $\lambda$ ).<sup>5</sup> Las variables son atributos multivaluados de nuestro contexto formal. Pueden ser constantes o no en el tiempo o el espacio. Los valores que adquieren dependen en gran medida del modelo, ya sea que sean fijados arbitrariamente, al explorar límites, por restricciones relacionales, etc. Por dar unos ejemplos: de-Sitter considera un universo vacío, lo que se traduce en  $\rho=0$ , Einstein supone un universo estático y homogéneo, y encuentra una relación entre la constante cosmológica, la densidad de materia y el radio del Universo:

$$\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}.$$

Estas relaciones le permiten hacer una estimación del tamaño y la masa total del Universo:  $M = \rho^2\pi^2R^3$ .

Las soluciones que se obtienen al resolver las ecuaciones de Friedmann-Lemaître se dan dentro de ciertos parámetros, rangos y constricciones, valores que toman las variables y que elegimos como atributos del contexto formal. La inclusión de estos valores permite visualizar modelos especializados. Los atributos multivaluados pueden ser continuos, como lo es  $R$ ; o discretos, como lo es el parámetro de curvatura  $k = -1, 0, +1$ . En ocasiones las imposiciones a los valores sólo se dan de forma relacional, por ejemplo, exigiendo que la densidad de materia sea positiva. Los valores de los atributos multivaluados se relacionan mediante escalas conceptuales. Los retículos resultantes presentan motifs característicos, estructuras que al combinarse se van complejizando. Estas escalas pueden pensarse como subcontextos del contexto formal que nos muestran cómo se relacionan entre sí, a nivel conceptual, los distintos valores. La Figura 4 muestra una escala conceptual para la ecuación de estado que relaciona la presión y la densidad del Universo:  $p=w\rho$ .<sup>6</sup>

Al seleccionar, tanto objetos como atributos para conformar contextos debemos considerar no solo lo capturado en los textos bajo la etiqueta de supuestos, de extraer las fórmulas apropiadas que resumen las relaciones fundamentales, las variables o dominios, las condiciones y soluciones, y sus relaciones,

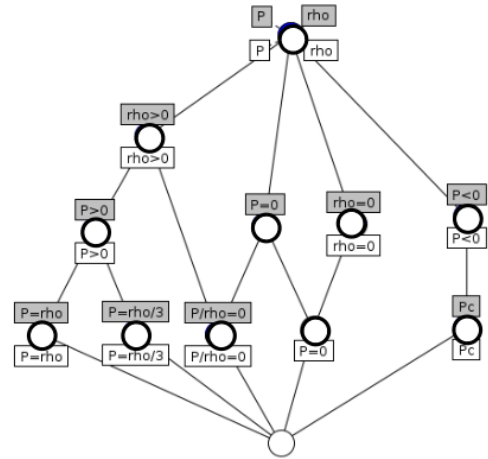
<sup>5</sup> Durante el periodo estudiado la constante cosmológica fue simbolizada con la letra minúscula  $\lambda$ . En tiempos recientes, especialmente desde su identificación con la energía oscura se ocupa la letra mayúscula  $\Lambda$ . En este texto recurriremos a la versión original.

<sup>6</sup> Véase el apartado sobre escalamiento conceptual en Ganter y Wille (1999, p. 59).

también debemos tener en cuenta nuestra aproximación al problema, ya sea histórica o cristalizada, cuestión a la que dedicamos la siguiente sección.

**Figura 4.** Escala de los atributos multivaluados de presión y densidad, según la ecuación de estado  $p = w\rho$ ,

	P	P<0	P>0	P=0	Pc	$\rho$	$\rho<0$	$\rho>0$	$\rho=0$	P/ $\rho=0$	P= $\rho/3$	P= $\rho$
P	x					x						
P<0	x	x				x						
P>0	x		x			x		x				
P=0	x			x		x						
Pc	x	x			x	x						
$\rho$	x					x						
$\rho<0$	x					x	x					
$\rho>0$	x					x		x				
$\rho=0$	x					x			x			
P/ $\rho=0$	x			x		x		x		x		
P= $\rho/3$	x		x			x		x			x	
P= $\rho$	x		x			x		x				x



donde  $w$  es un parámetro adimensional que toma los valores  $-1, 0$ , ó  $1/3$ , dependiendo del tipo de materia/energía de la que se esté hablando. Las relaciones entre variables se expresan en subcontextos donde los valores de las variables son comparados tanto como objetos como atributos.

### 6. Aproximaciones históricas vs. cristalizadas

Al comparar modelos teóricos o experimentales, es habitual observar que éstos sufren modificaciones a lo largo del tiempo y de investigador a investigador. Los científicos ajustan sus formulaciones, incorporan o eliminan elementos, cambian notaciones, sistemas de coordenadas o supuestos físicos, y reformulan modelos a la luz de nuevas teorías. Dar cuenta de estos cambios resulta central para el estudio del desarrollo histórico de las teorías y de los modelos científicos.

En este contexto, puede ser igualmente relevante comparar un mismo modelo a partir de sus diversas descripciones formales. Tales estudios se ven facilitados cuando las notaciones y formulaciones se estandarizan; sin embargo, esta práctica puede conducir a comparaciones anacrónicas. El desarrollo de las estructuras teóricas puede representarse mediante diversas visualizaciones –mapas aluviales, histogramas, redes de copalabras o, como en nuestro caso, series de retículos conceptuales con cortes sincrónicos o diacrónicos– que permiten sintetizar procesos de búsqueda de soluciones, incorporación de variables, supuestos y nuevas relaciones, así como mostrar patrones de desarrollo y micro-cristalizaciones.

Estas visualizaciones pueden adoptar dos enfoques complementarios: por un lado, comparaciones sincrónicas entre distintos modelos escritos bajo un mismo formalismo en un momento dado; por otro lado, comparaciones diacrónicas que muestran cómo un mismo modelo se enriquece y transforma a lo largo del tiempo, o cómo un autor reelabora modelos previos en sus propios términos.

La comparación entre modelos distintos se ve particularmente facilitada cuando éstos se describen mediante un formalismo común. Este tipo de comparación es frecuente tanto en textos de revisión como en trabajos que introducen modificaciones formales y evalúan la consistencia de resultados previos. Desde una perspectiva contemporánea, uno de los atributos que distingue a los modelos cosmológicos es el valor del parámetro  $w$  de la ecuación de estado, asociado a distintas eras del Universo. Sin embargo, los modelos presentados en los trabajos originales de Einstein (1917), de-Sitter (1917) y Friedmann (1922, 1924) no incluyen ecuaciones de estado ni nociones de eras cosmológicas, ni hacen referencia al parámetro  $w$ . Esta noción fue introducida explícitamente por Lemaître en 1931. Caracterizar retrospectivamente estos modelos mediante valores de  $w$  puede, por tanto, inducir una lectura anacrónica.

Para abordar este problema proponemos identificar micro-cristalizaciones: formulaciones intermedias que reinterpretan modelos previos en términos progresivamente más modernos. Así, de-Sitter reformula el modelo de Einstein utilizando un nuevo sistema de coordenadas; Friedmann replantea el problema en términos dinámicos y presenta los modelos estáticos como casos particulares; Tolman introduce nuevos casos, como Minkowski y AdS, nuevamente con su propia formulación; Lemaître separa explícitamente las componentes espacial y temporal, derivando una ecuación de expansión y mostrando los modelos de Einstein y de-Sitter como casos límite; finalmente, la foliación de Robertson introduce el tiempo cósmico y modifica la curvatura espacial, reinterpretando modelos anteriores dentro de un nuevo marco formal.

Este desarrollo escalonado de la cosmología permite realizar comparaciones sincrónicas – utilizando la formulación, notación y sistema de coordenadas de un autor específico– así como comparaciones diacrónicas de un mismo modelo a lo largo del tiempo. Ambas perspectivas resultan informativas y complementarias. Las formulaciones originales de Einstein, de-Sitter y Friedmann, por ejemplo, no incluyen elementos hoy centrales como el factor de escala, las coordenadas comóviles o la constante de Hubble, y difieren notablemente en notación y elección de coordenadas.

El Cuadro 2 presenta diversas formulaciones del elemento de línea del modelo estático de Einstein (1917), según distintos autores históricos y contemporáneos. El elemento de línea  $ds^2$  representa la distancia entre dos puntos infinitesimalmente cercanos en el espacio-tiempo, independiente del sistema de coordenadas, mientras que la métrica  $g_{\mu\nu}$  expresa esta distancia en un sistema específico. Esta diversidad de formulaciones plantea dilemas metodológicos tanto para la minería de términos como para la interpretación conceptual: ¿debemos comparar los modelos históricos en sus propios términos o reinterpretarlos mediante un formalismo cristalizado? ¿Son equivalentes estas representaciones?

Consideremos el caso de la ecuación de estado. En la cosmología contemporánea, la evolución del Universo se modela en términos de fases dominadas por distintos contenidos materiales –radiación, materia no relativista y energía oscura– caracterizadas por valores específicos del parámetro  $w$ . La ecuación de estado permite conectar modelos de distintas eras, pero esta partición del Universo en fases no se encuentra explícitamente en los escritos de Einstein, de-Sitter ni Friedmann. Aunque es posible asignar retrospectivamente valores de  $w$  para facilitar comparaciones contemporáneas –por ejemplo,  $w=-1$  para el modelo vacío de de-Sitter o  $w=0$  para el modelo estático de Einstein–, estas asignaciones constituyen reinterpretaciones modernas.

Autor	Elemento de línea para un universo estático	Coordenadas
Einstein	$g_{\mu\nu} = -\left(\partial_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right)$	Cuasi-cartesianas, tiempo estático
de-Sitter	$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2] + c^2 dt^2$	Elípticas, tiempo estático
Friedmann	$ds^2 = -R^2 c^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2$	Hiperesféricas, tiempo cósmico, globales
Tolman	$ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + dt^2$	Esféricas, tiempo cósmico, No globales
Robertson	$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) du^2$	Comóviles, globales
Lemaître	$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2$	Hiperesféricas, comóviles, globales
Peebles	$ds^2 = dt^2 - \left[ \frac{dr^2}{1 - r^2 R^{-2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$	Esféricas, comóviles, globales
Chat GPT	$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$	Hiperesféricas, comóviles, globales

Cuadro 2. Elemento de línea por autor para el modelo estático de Einstein (1917).

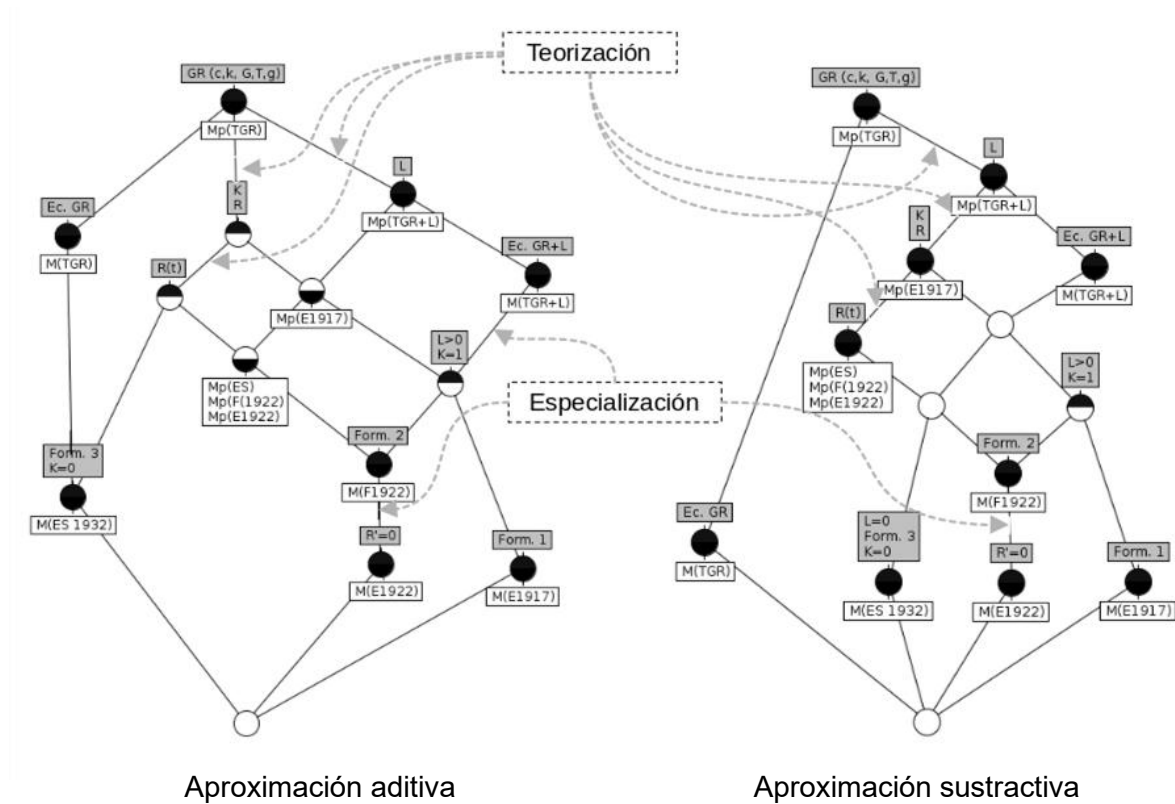


Figura 5. Dos retículos que relacionan los mismos modelos cosmológicos:  $M(E1917)$ : modelo estático de Einstein (1917);  $M(E1922)$ : Modelo de Einstein según Friedmann;  $M(F1922)$ : modelo dinámico de Friedmann;  $M(ES1932)$ : Modelo sin  $\lambda$  de Einstein y de-Sitter;  $M(TGR+\lambda)$ : Modelo de la Teoría de Relatividad General con constante cosmológica;  $M(TGR)$ : Modelo de la Teoría de la Relatividad General sin constante cosmológica; así como sus correspondientes modelos potenciales. La Figura izquierda muestra una aproximación aditiva, donde  $M(ES1932)$  no considera en su dominio la constante cosmológica  $\lambda$ , quedando en una rama distinta a la generada por  $M_p(TGR+\lambda)$ . La Figura derecha muestra una ubicación distinta para  $M(ES1932)$ , donde la condición de que  $\lambda=0$  ( $L=0$ ). La estructura de las redes cambia dependiendo de nuestra aproximación constructiva.

La comparación cristalizada facilita la identificación de relaciones de especialización en los retículos conceptuales, pero conlleva el riesgo de introducir atributos anacrónicos. La aproximación histórica, en cambio, permite rastrear la emergencia progresiva de conceptos y preservar la fidelidad semántica de los modelos originales. En este trabajo adoptamos esta última como criterio principal, sin descartar el uso controlado de micro-cristalizaciones que posibiliten comparaciones útiles. Ambas perspectivas son informativas y complementarias.

Dado que la cosmología contemporánea aún presenta controversias abiertas –en torno a la naturaleza de la materia oscura, la energía oscura, el inflatón o las teorías de gravedad modificada–, consideramos que una aproximación sensible a la historicidad del discurso cosmológico no sólo es metodológicamente adecuada, sino epistemológicamente necesaria.

### 7. Sustracción vs adición: El caso de la constante cosmológica

En términos generales, las reconstrucciones teóricas, y en ese sentido, las escalas conceptuales pueden seguir dos caminos: (1) la vía sustractiva, que parte de ecuaciones generales y luego restringe el modelo

mediante condiciones específicas, y (2) la vía aditiva, que comienza con elementos mínimos a los que se agregan propiedades conforme el modelo se desarrolla. Muchos filósofos y físicos como Lawrie (2012) aprecian la vía sustractiva que “consiste en relajar suposiciones incorrectas, aunque plausibles, que estamos inclinados a hacer acerca de la naturaleza del espacio tiempo, en lugar de introducir nuevas suposiciones”. La vía aditiva la cual podemos encontrar en las axiomatizaciones de Bunge (1967) puede ser más útil para visualizar el desarrollo histórico de los modelos, aunque la historia misma no siempre siga un camino lineal. En la Figura 5 se presentan dos retículos que contrastan los mismos modelos bajo aproximaciones distintas.

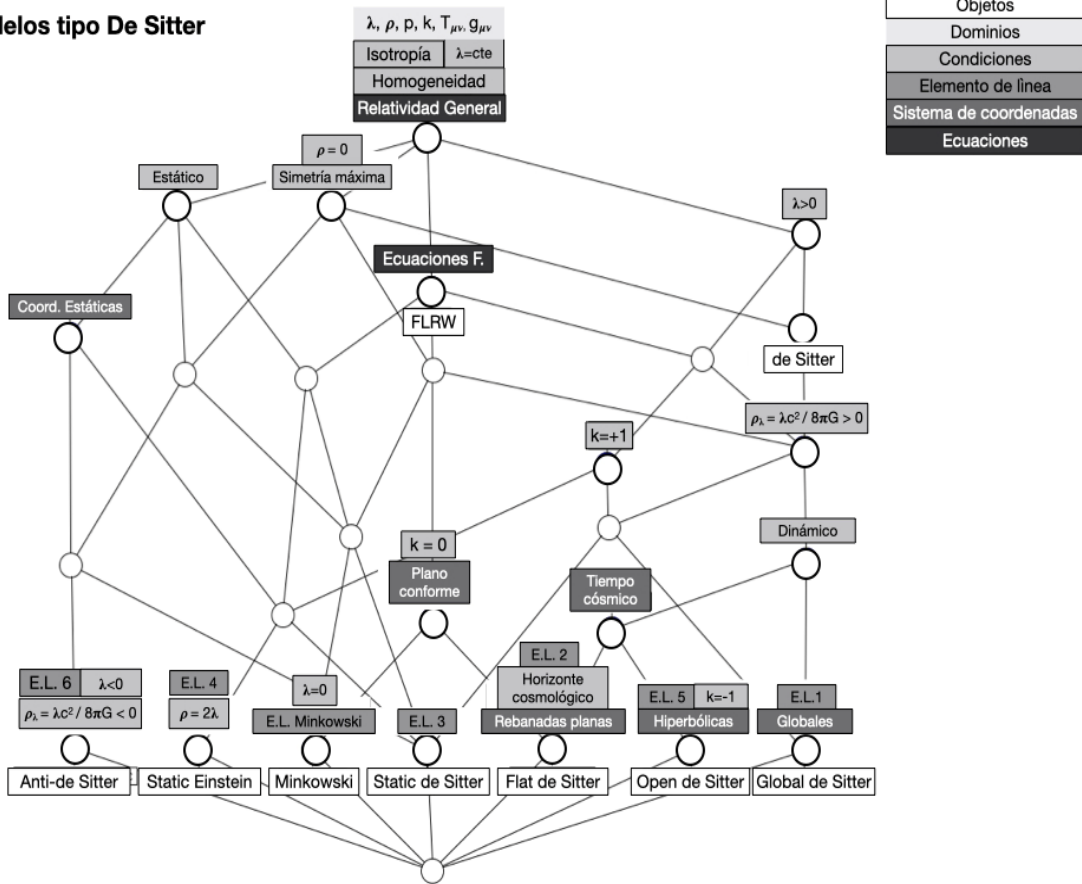
La constante cosmológica resulta ideal para mostrar estos aspectos interesantes en la construcción de los retículos teóricos. Einstein introdujo  $\lambda$  en 1917 como un término adicional en sus ecuaciones de campo con el propósito de contrarrestar la atracción gravitacional evitando el colapso universal y mantener un universo estático. Este término fue introducido como un artificio matemático (una constante de integración) para satisfacer la necesidad de equilibrio en su modelo, el cual ha mostrado ser inestable. Posteriormente, Friedmann, al formular sus ecuaciones dinámicas en 1922 y 1924, continuó incluyendo la constante cosmológica, aunque sin asignarle una interpretación específica (véase Fig. 8). Su objetivo era explorar soluciones generales bajo diferentes escenarios de curvatura, expansión y contracción. Tolman en 1929 obtiene soluciones para un modelo AdS tomando  $\lambda \leq 0$  (véase Fig. 9). Más adelante, los estudios de Lemaître y Robertson demostraron que la expansión natural del universo, derivada de las ecuaciones de Friedmann, no requería una fuerza repulsiva para evitar el colapso. Einstein y de-Sitter (1932) sucumbieron ante las evidencias de un Universo en expansión, modelando un universo homogéneo e isotrópico dominado por materia, en un espacio euclidiano ( $k=0$ ) pero curvo en el tiempo. Eliminaron la constante cosmológica de sus ecuaciones dado que ya no existía evidencia observacional que justificara su inclusión. Nussbaumer argumenta que Einstein no igualó  $\lambda$  a cero, la retiró por completo del marco teórico de su modelo, situación que Tolman calificó como desafortunada. En 1967, Yakov Zeldovich propuso una conexión explícita entre  $\lambda$  y la densidad de energía del vacío, con base en desarrollos de la teoría cuántica de campos. Las observaciones de supernovas tipo Ia en los años noventa, que evidencian una expansión acelerada del universo, llevaron a reintroducir la constante cosmológica como Lambda mayúscula ( $\Lambda$ ) interpretada como una energía de origen desconocido (energía oscura). Aunque ha sido asociada con la densidad de energía del vacío, su valor teórico presenta una discrepancia de entre 50 y 120 órdenes de magnitud respecto al valor observado. Observaciones del proyecto DESI (Instrumento Espectroscópico para el Estudio de la Energía Oscura) sugieren que  $\Lambda$  varía en el tiempo (Andrade et al 2025, López 2025). Más aún, los análisis recientes de Son *et al.* (2025) han identificado una fuerte correlación entre las luminosidades estandarizadas de las supernovas de tipo Ia y las edades estelares de sus galaxias anfitrionas. Este sesgo en la edad de las progenitoras pone en entredicho la suposición de que las supernovas de tipo Ia son candelas estándar universales, una suposición fundamental para la inferencia de la aceleración cósmica y, por extensión, para la postulación de la energía oscura. Al corregir este sesgo, los datos de las supernovas concuerdan con las mediciones de oscilaciones acústicas de bariones (BAO) y del fondo cósmico de microondas (CMB) sin necesidad de una constante cosmológica, lo que sugiere que la evidencia de un universo en aceleración podría debilitarse considerablemente y que la constante cosmológica vuelva a ser descartada como sucedió en 1932.

Estos últimos asuntos no tendrían por qué ser relevantes para el análisis del periodo clásico, siendo tan posteriores, sin embargo, la inclusión o no del término y su naturaleza fueron materia de discusión y disputa entre los protagonistas del momento, así como para el tratamiento que demos en nuestro análisis. El caso de la constante cosmológica invita para discutir la naturaleza del atributo y ejemplificar el cambio correspondiente en la estructura del retículo según, la aproximación interpretativa y el sistema de construcción de los retículos. Tenemos la opción de identificar el modelo actual de la teoría general de relatividad (TGR) con las ecuaciones de Einstein que pueden incluir  $\lambda$  o no. Si la opción es la primera tomamos una vía sustractiva donde el modelo de Einstein y de-Sitter (1932) queda subsumido bajo el modelo potencial que incluye  $\lambda$ , con el condicionamiento adicional de que  $\lambda=0$ . Esto mismo podría asumirse para otras aplicaciones que nunca han requerido de esta constante, como lo es el cálculo de la

órbita de Mercurio, los cálculos de geolocalización, el cálculo de ondas gravitacionales y deformaciones por presencia de agujeros negros. Todos estos modelos tendrían que ser subsumidos bajo una condición específica de sustracción de la propiedad. En ambas aproximaciones el  $M_p(TGR)$  es un supraconcepto de  $M_p(TGR+\lambda)$ , pero el modelo  $M(ES1932)$  (el modelo propuesto por Einstein y de-Sitter en 1932 sin  $\lambda$ ) ha quedado bajo una rama distinta a la generada por  $M_p(TGR+\lambda)$ . La segunda opción, presenta el modelo potencial de la TGR sin  $\lambda$  como un modelo previo al modelo potencial que sí incluye  $\lambda$ , y dos modelos actuales distintos de la TGR: uno con ecuaciones que no incluyen a  $\lambda$  y otro que sí la incluyen (véase Fig. 5). En este trabajo hemos optado por la aproximación aditiva, es decir, respetar el destierre de  $\lambda$  del marco teórico de  $M(ES1932)$ . Ello permite una comparación más clara y directa entre modelos con y sin constante cosmológica, desde una perspectiva histórica. La exclusión de  $\lambda$  de  $M(TGR)$  no afecta los principios esenciales de la relatividad general y especial –como los de equivalencia, covarianza y la finitud de la velocidad de la luz–, aunque su inclusión añade supuestos adicionales que modifican los escenarios cosmológicos posibles.

Otro caso interesante es el del espacio-tiempo de Minkowski que tiene dos roles distintos en nuestras redes. Uno como referencia en una premisa de condición o restricción, y otro como modelo. A la relatividad general se le exige tener como condición de frontera la relatividad especial cuando las distancias entre partículas son muy grandes  $r \rightarrow \infty$ , en regímenes de campo gravitacional débil o cuando  $\lambda=0$ ,  $\rho=0$  y  $k=0$ . La premisa específica a qué métrica debe reducirse en el límite apropiado. El espacio-tiempo de Minkowski también puede surgir como modelo especializado siendo solución a las ecuaciones de Einstein, y puede llegar a ello por dos vías distintas: cuando  $r \rightarrow \infty$ , o cuando el universo es plano  $k=0$ , vacío  $T_{\mu\nu}=0$  y sin constante cosmológica  $\lambda=0$ . Se están aquí identificando modelos extensionalmente equivalentes con intensiones distintas, y a diferencia del caso de-Sitter, aquí los modelos obtenidos tienen el mismo elemento de línea. Parece conveniente señalarlo mediante una diferenciación de modelos. La opción contraria es colocar ambos atributos juntos y de manera condicionada. Sin embargo, como estos otros atributos también son propios de otros modelos sin dichas condiciones, el asunto resulta engorroso.

**Modelos tipo De Sitter**



**Figura 6.** Retículo que compara cuatro formulaciones del modelo vacío de de-Sitter en distintas coordinatizaciones. Se incluye el modelo estático de Einstein, el modelo abierto estático AdS y el modelo del espacio de Minkowski. Se incluyen dos etiquetas tipo objeto para el modelo FLRW y para el nodo que conjunta los atributos necesarios para ser un modelo tipo de-Sitter. Nótese que el modelo AdS estático no se deriva de las eq. de Friedmann, aunque sí con la condición de simetría máxima. El modelo dinámico AdS con sistema de coordenadas global (no incluido en este retículo) sí es solución de las eq. de Friedmann.

**8. Ilustración de textos**

En la siguiente sección nos damos a la tarea de ilustrar con retículos cinco textos: Lemaître (1927), Friedmann (1922 y 1924), Tolman (1929) y Robertson (1933). En estos textos los autores no sólo describen su versión del universo, sino que comparan los modelos de autores previos con el propio en sus mismos términos. Es decir, proponen una notación, una formulación, un sistema de coordenadas, una foliación y bajo esos términos obtienen y comparan soluciones estáticas y dinámicas. Esta serie de retículos ilustran las relaciones conceptuales encontradas en dichos textos. Las etiquetas llaman a las ecuaciones ahí planteadas, mapeando el desarrollo de los modelos y sus formulaciones.

La Fig. 8 ilustra dos textos de A. Friedmann (1922, 1924), quien propone por vez primera un “mundo no estacionario” al variar el radio del Universo R en el tiempo. En el nodo supremo del retículo se muestran los atributos que Friedmann expone como principios de *clase 1* y que son supuestos en todos

los cálculos de ambos artículos.<sup>7</sup> Obtiene primero las soluciones para los modelos estacionarios con curvatura positiva (1922), y con curvatura negativa (1924). Los modelos de Einstein y de-Sitter de 1917 se derivan de las ecuaciones de Friedmann cuando el radio  $R$  del Universo no cambia en el tiempo. En 1924 encuentra que todos los mundos vacíos son estacionarios y que sólo uno de los mundos abiertos dinámicos es posible. Llama la atención la gran cantidad de casos y mundos posibles e imposibles que se derivan de sus ecuaciones. Su interés mayor radica en la finitud o infinitud de los mundos y el tiempo transcurrido desde la creación. Las distintas opciones de mundo según los valores de los atributos multivaluados resultan en una red teórica por especialización. Puede verse en el retículo que ninguno de los atributos por debajo del nodo supremo es de la clase *dominio*, es decir, no hay mayores teorizaciones.

El trabajo de Friedmann es la primera micro cristalización del modelo cosmológico, donde modelos específicos se entienden como casos particulares de un marco matemático más general. Por ejemplo, se pueden obtener las soluciones estáticas de Einstein o la solución vacía de de-Sitter como casos límite de las ecuaciones dinámicas de Friedmann al fijar las coordenadas, la curvatura y la constante cosmológica  $\lambda$  y las condiciones de densidad y presión material (véanse también estos modelos en las Figuras 9 y 10).

La Fig. 7 ilustra el texto de G. Lemaître (1931) donde compara su modelo no estacionario con el estático de Einstein, y el vacío de de-Sitter. El texto de Lemaître, una traducción del texto escrito en francés en 1927 no es tan exhaustivo como los de Friedmann, pero es relevante pues tras la temprana muerte del ruso, el físico belga replantea la posibilidad de un universo dinámico. Ahí se presenta por vez primera la ecuación del “efecto Doppler” como lo llama él, o relación velocidad-distancia (que más tarde se conocería como ley de Hubble).

La Fig. 9 ilustra uno de los varios textos que Tolman dedicó a la cosmología, donde compara los universos estáticos de Einstein y de-Sitter con el AdS y la relatividad especial. Aquí, como en el diagrama de la Fig. 11 que ilustra el texto de Robertson (1933), hemos buscado diferenciar entre varios modelos de relatividad especial (Caso 3-SR) y (T-SR); así como los modelos *FLRW* y *FLRW2*. De ello hablaremos en apartados posteriores.

---

<sup>7</sup> En 1924 refiere constantemente a ellos, pero con otra letra de referencia.

Lemaître 1927

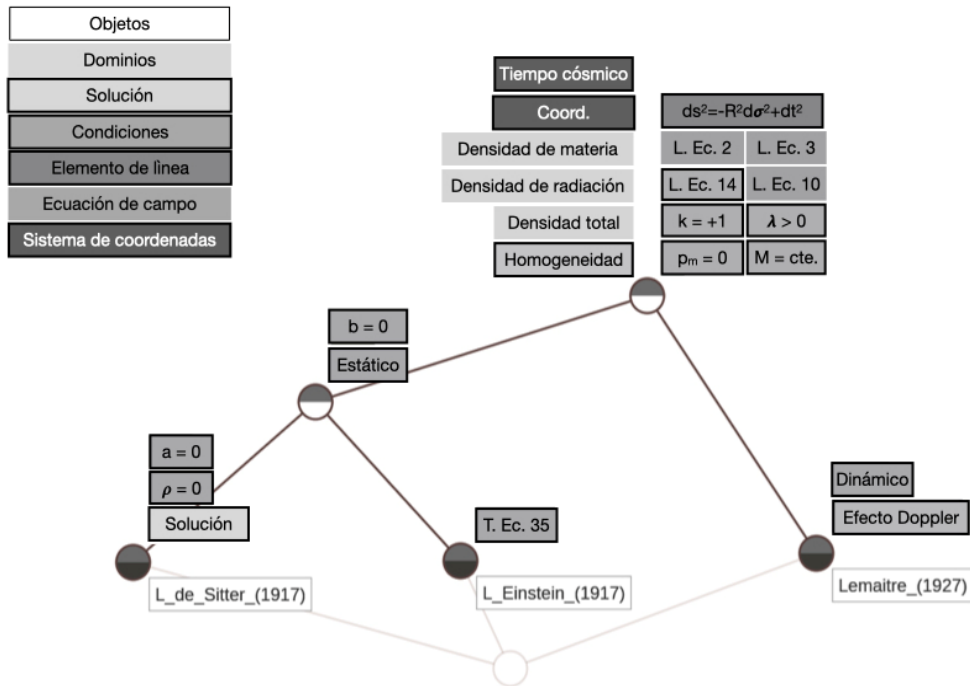


Figura 7. Retículo que ilustra el artículo de Lemaître 1931, donde compara los dos modelos estáticos de Einstein y de Sitter con su modelo dinámico. En el nodo superior quedan muchos atributos en común, entre ellos las ecuaciones de Friedmann.

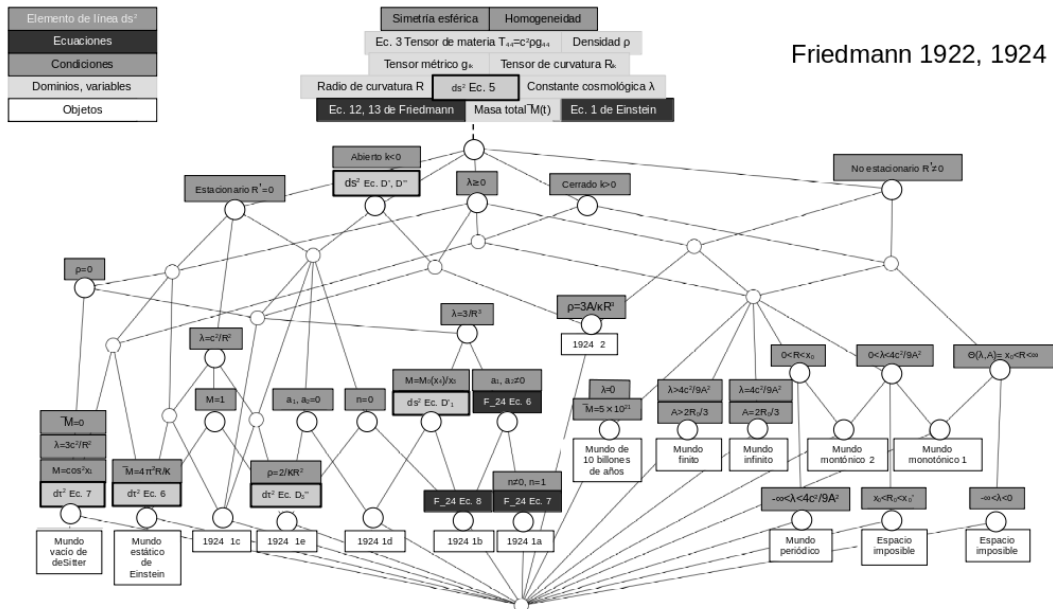
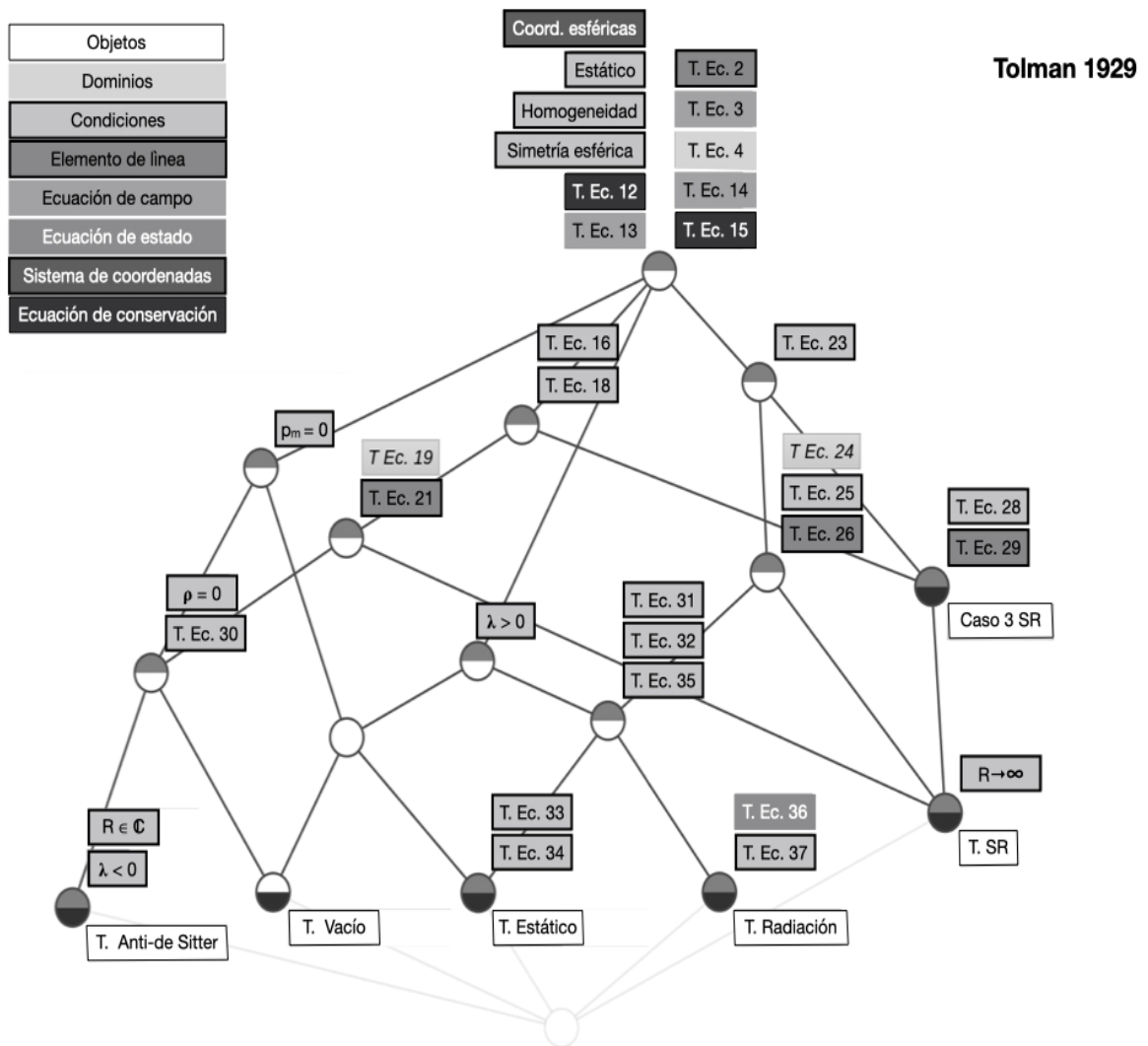


Figura 8. Retículo que ilustra dos artículos de A. Friedmann (1922 y 1924). Friedmann explora todas las soluciones para el caso estacionario y el no estacionario con curvatura positiva y negativa, y con constante cosmológica positiva.



**Figura 9.** Reticulo que ilustra el texto de Tolman (1929) donde se comparan varios modelos estáticos: El modelo estático de Einstein, el modelo vacío de de-Sitter, el modelo AdS con constante cosmológica negativa, el modelo para el caso de un universo dominado por radiación, y dos modelos de relatividad especial (SR), donde se distingue aquel al que se llega haciendo el radio del universo infinito, y el otro por ausencia de materia y curvatura plana.



Lorentziano:  $M(L) \subseteq M(TGR)$ , y se fundamenta en la mecánica de fluidos, la electrodinámica y la termodinámica. De manera que podemos identificar, de entre los atributos encontrados propios del nodo supremo, cuáles corresponden a modelos parciales de dichas teorías. La Figura 10 muestra el retículo correspondiente al trabajo de Robertson (1933) con la inserción de varios modelos parciales como objetos:  $M(L)$ ,  $M(TGR)$ ,  $M_p(FLRW)$ ,  $M_{pp}(Electrodinámica)$ ,  $M_{pp}(Mecánica de Fluidos)$ . Estos dos últimos aportan las nociones de tensor de energía-momento, presión, densidad de materia y de radiación, así como el tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  que para el caso de la cosmología clásica se considera cero, pero no así en los modelos tipo Bianchi o modelos anisotrópicos, por ejemplo, los universos magnetizados.

Podemos clarificar nuestras redes identificando y eliminando atributos redundantes o uniendo aquellos que se presentan siempre juntos. Un contexto formal  $(G, M, i)$  se encuentra clarificado si para cualquier par de objetos  $g, h \in G$  siempre que sucede  $g'=h'$  se sigue que  $g=h$ , y correspondientemente,  $m'=n'$  implica  $m=n$  para todos los  $m, n \in M$ .

Los atributos y objetos reducibles son aquellos que repiten los mismas intensiones o extensiones y pueden ser omitidos o fusionados con otros atributos u objetos. Por ejemplo, los axiomas que presentan conceptos primitivos, sus axiomas de interpretación y tipificaciones suelen venir siempre acompañados y pueden ser reducidos a un atributo que denote el dominio (véase Ganter y Wille 1999, p. 30).

El elemento de línea, por ejemplo, puede presentarse como una premisa, si es usado para construir las ecuaciones de campo y determinar constricciones. En el caso de relatividad y cosmología en general se buscan soluciones para la métrica  $g_{\mu\nu}$  bajo ciertas suposiciones de simetría y contenido material. Los espacio-tiempos lorentzianos tienen asociada una expresión muy general del elemento de línea  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  que se va refinando conforme más simetrías y condiciones se imponen al modelo, como se observa en la Fig. 10. El elemento de línea no suele aparecer en las reconstrucciones, pues es una expresión matemática demasiado compleja para examinarse detalladamente de forma binaria y debe verse como un portador de propiedades estructurales que pueden ser codificadas como atributos.

Un caso interesante es el modelo de universo vacío de de-Sitter, que admite variadas formulaciones, pero acompañadas de cambios en la geometría. Según la foliación que se haga del espacio-tiempo, el modelo puede parecer plano o curvo, estático o dinámico. Pero no se puede ser plano y curvo a la vez. Cada representación modifica atributos fundamentales, lo cual debe ser considerado al construir comparaciones. En la Fig. 6 se presenta un retículo que clasifica estas formulaciones y se etiqueta el nodo que condensa las propiedades invariantes del modelo de de-Sitter: simetría máxima, vacío ( $\rho=0$ ) y  $\lambda>0$ . Como subconceptos encontramos las versiones del modelo de de-Sitter con sus formulaciones particulares, revelando las condiciones bajo las cuales se expresan ciertos atributos.

Al comparar versiones de un mismo modelo en vez de comparar distintos modelos con una misma formulación, el lugar que ocupan las distintas clases de atributos cambia. Los atributos que no son compartidos pasan a un nivel inferior, mientras que los atributos físicos pasan a niveles superiores. Los elementos que han quedado en un nivel inferior: el elemento de línea, las condiciones de curvatura, el sistema de coordenadas y la foliación parecen estar más relacionadas con las condiciones impuestas por el observador (el modelador) que con las condiciones físicas del sistema.

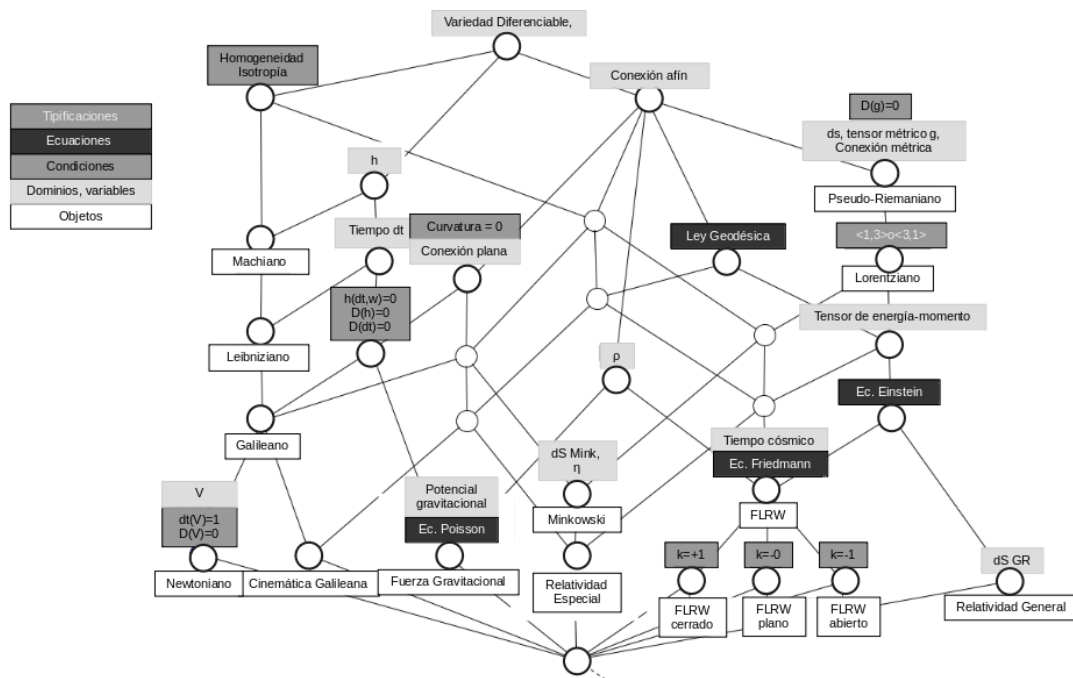
Es claro que la cosmología aún no está plenamente cristalizada. Existen controversias abiertas sobre la materia oscura, la energía oscura, el inflatón, así como múltiples propuestas de teorías alternativas a la relatividad general, como las teorías  $f(R)$ , extendidas o de gravedad modificada y de sus correspondientes modelos cosmológicos. Por tanto, mantener una aproximación sensible a la historicidad del discurso cosmológico nos parece no solo metodológicamente adecuado, sino epistemológicamente necesario. La Fig. 6 puede entonces clarificarse al omitir los elementos de línea como atributos, pues la estructura no cambiará en absoluto. Por otro lado, los elementos de línea pueden servir como identificadores de ciertos modelos en distintas jerarquías.

## 10. Sobre el espacio FLRW

En la página web *Exploratorium de teorías del espacio-tiempo*, así como en Espinosa (2022, 2023), se ha propuesto un retículo teórico que relaciona diez modelos de espacio-tiempo: leibniziano, newtoniano, galileano, lorentziano, newton-cartan, pseudo-riemanniano y de Minkowski. En la Figura 11 se presenta esta misma red con la incorporación del modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (*FLRW*). Ese estudio sigue una lógica sustractiva, bajo la formulación riemanniana donde los objetos geométricos se describen en términos de la geometría diferencial libre de coordenadas.

Los nuevos modelos pueden traer consigo nuevos atributos que deben ser evaluados para el resto de los objetos y su inclusión puede ocasionar cambios significativos en la red. El espacio-tiempo *FLRW* trajo consigo como propiedades relevantes la homogeneidad y la isotropía del espacio, propiedades que comparte con el espacio-tiempo newtoniano y el de Minkowski.  $M(FLRW)$  también hereda las propiedades del espacio lorentziano  $M(Lor)$ , una especialización del espacio pseudo-riemanniano caracterizado por un tensor métrico con signatura  $(+, +, +, -)$  (o su variante  $(-, +, +, +)$ , determinada por la coordenada temporal: el tiempo cósmico. La curvatura del espacio y la foliación que separa el espacio-tiempo de 4D en uno de 3D+1 se reflejan en su elemento de línea, concretamente en la métrica de Robertson-Walker. El modelo de espacio-tiempo tipo *FLRW* resulta de una teorización del espacio-tiempo lorentziano al añadir un radio característico, el del universo y una nueva definición de tiempo cósmico.

La Figura 9 ilustra dos versiones del modelo potencial *FLRW*:  $M_p(FLRW)$  y  $M_p(FLRW2)$ , donde la segunda constituye una formulación más específica. Ambos suponen una variedad diferenciable de cuatro dimensiones, una conexión métrica, y un tensor métrico con derivada covariante nula, pero sólo *FLRW* añade las restricciones que permiten derivar las ecuaciones de Friedmann al ser combinadas con las ecuaciones de Einstein. Este paso da lugar al modelo actual  $M(FLRW)$ , capaz de describir la evolución dinámica del universo bajo distintos contenidos materiales. Una situación análoga ocurre con la distinción entre el espacio de Minkowski y la relatividad especial: el modelo geométrico  $M(Mink)$  no presupone distribución de materia, ni simetrías, mientras que el modelo teórico  $M(SR)$  sí incorpora homogeneidad e isotropía como condiciones del contenido material (Read 2023). Por ello, *FLRW* se distingue de Minkowski al no limitarse a vacíos ni a condiciones locales, sino al permitir representar la evolución global del universo bajo diversas configuraciones físicas. De manera que  $M_p(Mink) \subseteq M_p(SR)$ ,  $M_p(Lor) \subseteq M_p(FLRW)$ , visto de forma intensional. Nótese, sin embargo, que las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio en sí son atributos de los modelos de Minkowski y *FLRW*.



**Figura 11.** Retículo teórico de espacio-tiempos que incluye tres versiones del espacio-tiempo *FLRW*: cerrado, abierto y plano. Podemos observar tres cadenas de modelos entre el espacio de Mach, de Leibniz, el galileano y el newtoniano, así como entre el espacio de Minkowski y la Relatividad Especial o entre el pseudo-riemanniano y el lorentziano. Encontramos una teorización entre el Lorentziano y el *FLRW*, así como una distinción entre el elemento de línea que caracteriza la relatividad general y el elemento de línea producido por las consideraciones cosmológicas y la foliación 3+1 dada con el tiempo cósmico.

## 11. Verificación de implicaciones con inteligencia artificial

Las relaciones de inclusión que prevalecen entre los conceptos nos hablan también de una serie de implicaciones entre los atributos. Implicaciones del tipo:  $D \Rightarrow F$  donde siempre que se tiene un conjunto de atributos  $D$  se tiene el conjunto de atributos  $F$ . Un contexto con  $n$  atributos puede generar hasta  $2^{2^n}$  implicaciones, muchas de ellas redundantes o triviales, pero es posible calcular una base mínima de implicaciones a partir de la cual se generan todas las demás. Esta base mínima, conocida como Duquenne-Guigues, es calculada por el programa Concept Explorer (véase Ganter & Obiedkov 2016).

La verificación de los retículos obtenidos consiste en preguntar a un experto si las implicaciones son verdaderas, y en caso negativo proporcionar un contra-ejemplo o detener la exploración para modificar el contexto y volver a calcular el retículo y sus nuevas implicaciones.<sup>8</sup> Puede pedirse que las implicaciones sean extensionalmente verdaderas, es decir, que sean verdaderas en  $G$ , o pueden pedirse contra-ejemplos fuera de  $G$  con el fin de extender el contexto formal inicial. Hay distintos tipos de implicaciones, algunas más fuertes e interesantes que otras. El número de objetos que cumplen cierta implicación modula dicha fortaleza, pero también interesa identificar aquellas que son definicionales, e identificando aquellos atributos que se encuentren siempre juntos ya sea porque son tipificaciones de un dominio o porque uno se derive del otro. Será conveniente identificar aquellas implicaciones que suceden solo en casos excepcionales, o que se rompan fácilmente con algún contra-ejemplo.

La verificación de las implicaciones puede ser ardua y tediosa, en especial si se piensa en visualizar varios retículos como es el caso, cada uno con docenas de implicaciones por verificar. No resulta sencillo convencer al experto de realizar esta labor, por ello hemos recurrido a ChatGPT, un modelo avanzado de lenguaje generativo (LLM) desarrollado por OpenAI, como herramienta colaborativa para realizar una

<sup>8</sup> El proceso iterativo de conformación del contexto, exploración y validación nos da confianza en los resultados de la visualización de la red. Por otro lado, el contenido que conforma la base de datos se encuentra referenciado a las fuentes seminales.

exploración sistemática.<sup>9</sup> ChatGPT puede recibir inputs en lenguaje latex e interpreta correctamente las ecuaciones proporcionadas. Igualmente puede ofrecer respuestas en forma de diálogo, tablas de verdad, notación matemática o diversos lenguajes de cómputo, así como referencias correctas en la mayoría de los casos. Debe, sin embargo, anotarse que la supervisión del experto sigue siendo necesaria, ya que en varios casos se obtuvieron resultados equivocados. Por ejemplo, el “razonamiento” del chat fue dudoso, en particular con las implicaciones vacuamente verdaderas. Si nos preguntan si  $A \Rightarrow B$  es verdadero y sabemos que ningún objeto contiene  $A$ , es decir,  $A$  es falso, entonces la implicación es verdadera, aunque no nos diga mucho de  $B$ . Este tipo de implicaciones se obtienen también como resultado del análisis con el Concept Explorer. En ocasiones el ChatGPT confundió el conjunto de objetos estudiado, inventando atributos y objetos inexistentes. El ejemplo más llamativo es la insistencia del ChatGPT en decir que en el texto de Friedmann de 1922 la constante cosmológica  $\lambda$  no es considerada en las ecuaciones, cosa falsa. Al parecer esta idea es tomada de la última frase del texto que cita: “Cabe señalar que la magnitud ‘cosmológica’ permanece indeterminada en nuestra fórmula, ya que es una constante superflua en el problema.”<sup>10</sup> Sospechamos que esta frase desvirtúa las conclusiones del ChatGPT respecto al uso que hace Friedmann de  $\lambda$  en sus ecuaciones. Fue necesario regresar a los textos originales y verificar la información proporcionada que algunas veces es incorrecta, pero otras veces es sorprendentemente verdadera. Las contradicciones observadas derivan en gran medida de la diversidad de formulaciones existentes y de las múltiples etapas de desarrollo que ha venido atravesando esta nueva ciencia, así como la relación intrínseca entre atributos. Así, una búsqueda de términos puede llevar a falsas equivalencias o a omitir aspectos fundamentales. Debe precisarse que esta herramienta no fue utilizada para la extracción automatizada de datos ni para la conformación de contextos. Estas son actividades que aún realiza el investigador. Su labor fue la de confirmación o refutación de implicaciones y la de proveer contra-ejemplos potenciales.

Las conversaciones con el ChatGPT sirven de ejemplo para los expertos y estudiantes de cómo atacar las preguntas de implicación y la validación de retículos, pero también de sesgos y malas interpretaciones. La identificación en Friedmann de  $\lambda$  como una constante superflua para evitar la contracción no implica que no la haya utilizado en sus modelos siguiendo la propuesta primera de Einstein, lo que se observa fácilmente a lo largo del texto. Al explorar el contexto formal de las teorías de espacio-tiempo le fue difícil mantenerse en el esquema geometrizado, saltando cada cuando a las descripciones dinámicas y decidiendo cambiar las tablas de incidencia que el chat mismo va conformando sin que uno lo solicite y que parece retener en su memoria, o a pesar de solicitar que no lo haga. Ante prompts repetitivos en estructura, el chat busca variar el estilo de sus respuestas y da consejos no solicitados sobre lo que puede seguirse haciendo. En varias ocasiones las exploraciones debieron detenerse al detectarse que el LLM había cambiado los elementos de  $G$  o  $M$ , la definición de algún atributo, o la formulación geométrica. La herramienta no exime de consultar directamente las fuentes originales y a expertos en la materia, pero sí permite avanzar más rápidamente. Sigue siendo una herramienta heurística computacional y de búsqueda de información bajo criterios muy específicos, pero también de reflexión epistémica como un interlocutor socrático.

Dado que la base de Duquenne-Guigues puede ser inabarcable para un solo experto humano en términos de fatiga cognitiva, el LLM se utiliza como un filtro de primer orden. El riesgo de “alucinación” se neutraliza mediante un diseño de un sistema cerrado: ninguna conclusión generada por la IA se incorpora al contexto formal sin una referencia explícita y verificada en la fuente primaria. En este sentido, la IA no realiza un análisis metateórico autónomo, sino que asiste en la reconstrucción racional de teorías, actuando como un espejo dialéctico que resalta las ambigüedades de las formulaciones

<sup>9</sup> Otras inteligencias artificiales especializadas en lenguaje matemático, programación o datos científicos como son CLAUDE AI o PERPLEXITY AI fueron dadas a conocer después de que este estudio se iniciara. Se optó por continuar con Chat GPT dado el entrenamiento que ya había recibido. Los resultados, en todo caso, pueden ser contrastados.

<sup>10</sup> “It remains to note that the ‘cosmological’ magnitude  $\lambda$  remains undetermined in our formula, because it is a superfluous constant in the problem. [...] If we set  $\lambda=0$  and  $M=5 \times 10^{21}$  solar masses, the world period becomes of the order 10 billion years. However, these numbers are valid only as an illustration of our calculation.”

históricas. Nuevas actualizaciones de estas herramientas prometen una mejor actuación y resultan cada vez más indispensables para el avance de las investigaciones científicas.

## 12. Conclusiones

Este trabajo ha mostrado cómo el Análisis de Conceptos Formales (FCA) puede integrarse con el estructuralismo metateórico para construir representaciones jerárquicas, comparables y visualmente informativas de redes teóricas, a las que hemos llamado retículos teóricos. Hemos ejemplificado esta integración mediante la construcción de distintos retículos que comparan modelos cosmológicos de principios del siglo XX. Al identificar atributos relevantes desde una doble perspectiva – histórica y cristalizada– y clasificarlos en contextos formales, se han puesto de manifiesto relaciones de especialización y teorización entre modelos. Incluso nos hemos aventurado a replantear la definición tradicional de estas relaciones.

Estas decisiones no son triviales: definen la estructura del retículo y revelan la intención del reconstructor. Una aproximación histórica permite rastrear la evolución de notaciones y formulaciones, mostrando el desarrollo conceptual de una teoría a través del tiempo. En contraste, una aproximación cristalizada reconfigura ese desarrollo como una jerarquía lógica dentro de un marco más general.

El análisis de las múltiples formulaciones del espacio de de-Sitter mostró cómo, en los retículos construidos, los atributos físicos tienden a ubicarse en niveles jerárquicos superiores, mientras que los relativos al sistema de coordenadas adoptado por el observador se sitúan en niveles inferiores. También se destacó el papel del elemento de línea como identificador estructural clave, ya que condensa tanto la métrica como el sistema de coordenadas, permitiendo distinguir con precisión entre modelos.

En definitiva, se plantea una tensión productiva entre la aproximación histórica –que respeta las formulaciones originales y su contexto epistémico– y la aproximación cristalizada –que reordena los modelos como casos de estructuras posteriores más generales–. Ambas aproximaciones deben coexistir: la primera aporta matices, rupturas y ambigüedades; la segunda, comparabilidad lógica y robustez estructural. El enfoque dual adoptado aquí ofrece una estrategia fértil para navegar entre estas perspectivas, permitiendo tanto reconstruir el desarrollo conceptual de la cosmología como evaluar su arquitectura teórica.

El uso de inteligencia artificial (específicamente ChatGPT) como herramienta de apoyo ha contribuido significativamente al refinamiento de tablas, validación de implicaciones y exploración de contextos. Esta colaboración técnico-filosófica abre nuevas posibilidades para la investigación conceptual en filosofía de la ciencia, combinando precisión lógica con flexibilidad semántica.

A futuro, los resultados obtenidos podrán extenderse a otros conjuntos de modelos de periodos más recientes y alternativos, y servir de base para nuevas visualizaciones pedagógicas, filosóficas y computacionales del desarrollo teórico en cosmología. Serán incorporados a las visualizaciones interactivas encontradas en la página web del *Exploratorium* de teorías, lo que permitirá una exploración más completa pues permitirá abrir ventanas con la información codificada en las etiquetas de los atributos. Hay mucha información que se puede obtener de estos retículos, desde distancias conceptuales, índices de separación conceptual, probabilidades conceptuales, etc. que nos hablarán de inconmensurabilidad, de cambios teóricos o revolucionarios etc. Dichos análisis escapan el alcance de la presente publicación.

## Bibliografía

---

- Abreu, C., Lorenzano, P. y C. U. Moulines (2013), “Bibliography of Structuralism III (1995-2012, and Additions)”, *Metatheoria-Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia* 3(2):1-36.
- Andrade, U. et al. (2025). “Validation of the DESI DR2 Measurements of Baryon Acoustic Oscillations from Galaxies and Quasars”. <https://arxiv.org/abs/2503.14742>

- Balzer, W., Moulines, C. U. y J. D. Sneed (2012), *Una arquitectónica para la ciencia: el programa estructuralista*, Lorenzano, P. (Trad.), Bernal: Universidad Nacional de Quilmes.
- Balzer, W., Sneed, J. D. y C. U. Moulines (eds.) (2000), *Structuralist Knowledge Representation: Paradigmatic Examples*, Amsterdam: Rodopi.
- Bartelborth, T. (1993), "Hierarchy versus Holism: A Structuralist View on General Relativity", *Erkenntnis* 39: 383-412.
- Birkhoff, G. (1940), "Lattice Theory", *American Mathematical Society colloquium publications* 25.
- Brown H. (2005), *Physical Relativity: Space-time Structure from a Dynamical Perspective*, Clarendon, NY: Oxford University Press.
- Bunge, M. (1967), *Foundations of Physics*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
- de-Sitter, W. (1917), "Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. Third Paper", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 78: 3-28.
- Diez, J. A. y C. U. Moulines (2008), *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia*, Barcelona: Ariel.
- Einstein, A. (1917), "Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Mathematical Physics)* 17; 142-152.
- Einstein, A. y W. de-Sitter (1932), "On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 18(3): 213-214.
- Espinosa, M. (2022), *Visualizaciones de redes conceptuales de teorías del espacio-tiempo y la gravitación, mediante el análisis de conceptos formales*, Tesis doctoral, Posgrado en Ciencias Sociales y Humanidades, Universidad Autónoma Metropolitana.
- Espinosa, M. (2023), "The Space-Time Theories Exploratorium", En Colin García, H. M., Guzmán, J. D., Kauffman, L. H. y H. Makaruk (eds.), *Scientific Legacy of Professor Zbigniew Oziewicz*, Singapore: World Scientific Publishing, pp. 225-245.
- Friedman, M. (1983), *Foundations of Space-Time Theories. Relativistic Physics and Philosophy of Science*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Friedmann, A. (1924), "On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space", *Zeitschrift für Physik* 21: 326-332.
- Friedmann, A. (1979), "On the Curvature of Space", en Lang, K. R. y O. Gingerich (eds.), *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900-1975*, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 838-843.
- Ganter, B. y S. Obiedkov (2016), *Conceptual Exploration*, Berlin-Heidelberg: Springer.
- Ganter, B. y G. Stumme (2002), "Methods and Applications in Computer Science", *Formal Concept Analysis* 46: 1-117.
- Ganter, B., Stumme, G. y R. Wille (2003), *Formal Concept Analysis: Methods, and Applications in Computer Science*, Dresden: TU.
- Ganter, B. y R. Wille (1999), *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*, Berlin-Heidelberg: Springer.
- Janssen, M. (2009), "Drawing the Line Between Kinematics and Dynamics in Special Relativity", *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 40(1): 26-52.
- Lange, M. (2007), "Laws and Meta-Laws of Nature: Conservation Laws and Symmetries", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 38(3): 457-481.
- Lawrie. L. D. (2012), *A Unified Grand Tour of Theoretical Physics*, Florida: Taylor & Francis Group.
- Lemaître, G. (1931), "A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius Accounting for the Radial Velocity of Extra-Galactic Nebulae", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 91(5): 483-490.
- López, P. (2025), "La expansión del universo no es constante en el tiempo", *Gaceta UNAM*, No. 5553: 16-17. <https://www.gaceta.unam.mx/la-expansion-del-universo-no-es-constante-en-el-tiempo/>
- Longair, M. (2006), *The Cosmic Century. A History of Astrophysics and Cosmology*, New York: Cambridge University Press.
- Luminet, J. P. (2014), "Lemaître's Big Bang", *Frontiers of Fundamental Physics* 14, Marseille : Marseille University.
- McCrea, W. H. y E. A. Milne (1934), "Newtonian Universes and the Curvature of Space", *General Relativity and Gravitation* 32(9): 1949-1958.

- Milne, E. A. (1933), "World Structure and the Expansion of the Universe", *Zeitschrift für Astrophysik* 6: 1-95.
- Moulines, C. (1985), "Tipología axiomática de las teorías empíricas", *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía* 17(51): 41-69.
- Moulines, C. U. (1982a), *Exploraciones metacientíficas*, Madrid: Alianza Editorial.
- Moulines, C. U. (1982b), "A Study in Protophysics", en Agassi, E. y R. S. Cohen (eds.), *Scientific Philosophy Today*, Dordrecht: Springer, pp. 207-224.
- Norton, J. (1999), "Geometries in Collision: Einstein, Klein and Riemann", en Gray, J. J. (ed.), *The Symbolic Universe: Geometry and Physics 1890-1930*, Oxford-Nueva York: Oxford University Press, pp. 128-144.
- Nussbaumer, H. y L. Bieri (2009), *Discovering the Expanding Universe*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Peebles, J. (2020), *Cosmology's Century: An Inside History of Our Modern Understanding of the Universe*, Cambridge, MA: Princeton University Press.
- Priss, U. (2007), "Formal Concept Analysis in Information Science", *Annual Review of Information Science and Technology* 40(1): 521-543.
- Pooley, O. (2013), "Substantialist and Relationist Approaches to Spacetime", en Batterman, R. (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Physics*, Oxford: Oxford University Press, pp. 522-586.
- Pooley, O. (2017), "Fundamentality and the Dynamical Approach to Relativity", Inédito, <https://philpapers.org/archive/POOFAT.pdf>
- Read, J. (2023), *Special Relativity. Elements in the Philosophy of Physics*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Robertson, H. P. (1933), "Relativistic Cosmology", *Reviews of Modern Physics* 5: 62-90.
- Singh, P. K., Cherukuri, A. y A. Gani (2016), "A Comprehensive Survey on Formal Concept Analysis, its Research Trends and Applications", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 26: 495-516.
- Son, J., Lee, Y., Chung, C., Park, S., y H. Cho (2025), "Strong Progenitor Age Bias in Supernova Cosmology - II. Alignment with DESI BAO and Signs of a Non-Accelerating Universe", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 544(1): 975-987.
- Tolman, R. C. (1929), "On the Possible Line Elements for the Universe", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 15(4): 297-304.
- Walker, A. G. (1937), "On Milne's Theory of World-Structure", *Proceedings of the London Mathematical Society* 2(1): 90-127.

## Glosario de etiquetas

---

**Figuras 1, 2 y 3**

A: Axiomas  
 D: Dominios  
 R: Relaciones  
 R<sub>c</sub>: Relaciones especializadas  
 C: Constricciones  
 L: Ligaduras  
 I: Aplicaciones Intencionales  
 M<sub>pp</sub>: Modelo potencial parcial  
 M<sub>p</sub>: Modelo potencial  
 M: Modelo actual  
 M<sub>c</sub>: Modelo especializado  
 K: Núcleo formal  
 ET: Elemento teórico

**Figura 4**

P: Presión  
 rho (ρ): Densidad  
 P<sub>c</sub>: Presión cosmológica

**Figura 5**

TGR: Teoría de la Relatividad General  
 GR(c, κ, G, T, g): Dominios de la TGR  
 κ: constante gravitacional  
 c: velocidad de la luz  
 g: Tensor métrico  
 T: Tensor de energía momento  
 L o λ: Constante cosmológica  
 Ec. GR: Ecuación de Einstein  
 Ec. GR+L: Ecuación de Einstein con constante cosmológica  
 R: Radio del Universo  
 R(t): Radio del Universo dependiente del tiempo  
 R'=0: Radio constante en el tiempo  
 k: Curvatura espacial  
 k=0: Curvatura plana  
 k=1: Curvatura cerrada  
 k=-1: Curvatura abierta  
 L>0: Constante cosmológica positiva  
 L<0: Constante cosmológica negativa  
 M<sub>p</sub>(TGR): Modelo potencial de la TGR  
 M(TGR): Modelo actual de la TGR  
 M<sub>p</sub>(TGR+L): Modelo potencial de la TGR con constante cosmológica  
 M(TGR+L): Modelo actual de la TGR con constante cosmológica  
 M<sub>p</sub>(E1917): Modelo potencial del modelo estático de Einstein de 1917  
 M(E1917): Modelo actual del modelo estático de Einstein de 1917  
 M<sub>p</sub>(ES1932): Modelo potencial del modelo dinámico de Einstein y de-Sitter de 1932  
 M(ES1932): Modelo actual del modelo dinámico de Einstein y de-Sitter de 1932  
 M<sub>p</sub>(F1922): Modelo potencial del modelo dinámico de Friedmann de 1922  
 M(F1922): Modelo actual del modelo dinámico de Friedmann de 1922  
 M<sub>p</sub>(E1922): Modelo potencial del modelo estacionario de Einstein con la formulación de Friedmann  
 M(E1922): Modelo actual del modelo estacionario de Einstein con la formulación de Friedmann

**En Einstein (1917) Form. 1:** Ec. 14:  $\lambda = \frac{\kappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}$

**En Friedmann (1922) Form. 2:** Ec 13:  $\frac{3R'}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \kappa c^2 \rho$

**En Einstein & de-Sitter (1932) Form. 3:** Ec 2:  $\frac{1}{R^2} \left( \frac{dR}{cdt} \right)^2 = \frac{1}{3} \kappa \rho$

**Figura 6** (Ecuaciones de Friedmann)

Ecuación de expansión:  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\lambda}{3}$

Ecuación de aceleración:  $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\lambda}{3}$

E.L. 1:  $ds^2 = -dt^2 + R^2 \cosh^2(r/R)(dX^2 + \sin^2 X d\Omega^2)$

E.L. 2:  $ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2ct/a}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$

E.L. 3:  $ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2(r/R)(d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2) + \cos^2 \frac{r}{R} dt^2$

E.L. 4:  $ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 - [d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$

E.L. 5:  $ds^2 = -dt^2 + R^2 \sinh^2(r/R)(dX^2 + \sinh^2 X d\Omega^2)$

E.L. 6:  $ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$

E.L. Minkowski:  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

**Figura 7**

L. Ec. 2:  $3 \frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho$

L. Ec. 3:  $2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa\rho$

L. Ec. 10:  $\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4}$

L. Ec. 14:  $\alpha = \kappa\delta R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$

L. Ec. 15:  $\lambda = \frac{1}{R_0^2}$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

**Figura 8**

En Friedmann (1922)

Ec. 1:  $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}\bar{R} + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}, (i, k = 1, 2, 3, 4)$

Ec. 3:  $T_{ik} = 0$  para  $i$  y  $k \neq 4, T_{44} = c^2 \rho g_{44}$

Ec. 5:  $ds^2 = R^2(dx_1^2 + \sin^2 dx_1 dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2) + M^2 dx_4^2$

Ec. 7:  $d\tau^2 = \frac{-R^2}{c^2}(dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2) + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 dx_3^2 + \cos^2 x_1 dx_4^2$

Ec. 12:  $\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0$

Ec. 13:  $\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \kappa c^2 \rho$

En Friedmann (1924)

Ec. D':  $ds^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2$

Ec. D1':  $ds^2 = \frac{R^2}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + a_1(x_4)x_2 + a_3(x_4) + x_3^2}{x_3}\right)^2 dx_4^2$

Ec. D'':  $d\tau^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{c^2 x_3^2} + M^2 dx_4^2$

Ec. D3'':  $d\tau^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{c^2 x_3^2} + dx_4^2$

F\_24 Ec. 6:  $\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{L}{x_3} = 2n$

F\_24 Ec. 7:  $L = \frac{L_0(x_4)}{x_3} + x_3$

F\_24 E. 8:  $L = \frac{L_0(x_4)}{x_3}$

**Figura 9**

En Tolman (1929)

T. Ec. 2:  $ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta + e^\nu dt^2$

T. Ec. 3:  $-8\pi T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$

T. Ec. 4:  $T^{\mu\nu} = (p_{00} + p_0) \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0$

T. Ec. 12:  $8\pi \frac{dp_0}{dr} + 8\pi(\rho_{00} + p_0) \frac{v'}{2} = 0$

T. Ec. 13:  $\rho_{00} = \frac{e^{-\lambda}}{8\pi} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{8\pi r^2} - \frac{\Lambda}{8\pi}$

T. Ec. 14:  $p_0 = \frac{e^{-\lambda}}{8\pi} \left( \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{8\pi r^2} - \frac{\Lambda}{8\pi}$   
 T. Ec. 15:  $\frac{dp_0}{dr} = -\frac{\rho_{00} + p_0}{2} \nu'$   
 T. Ec. 16:  $\rho_{00} + p_0 = 0$   
 T. Ec. 18:  $\lambda = -\nu$   
 T. Ec. 19:  $e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi\rho_{00}}{3} r^2 + \frac{A}{r}$   
 T. Ec. 21:  $ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2$   
 T. Ec. 23:  $\nu = const. = 0$   
 T. Ec. 24:  $e^\lambda = 1 - (\Lambda - 8\pi\rho_0)r^2$   
 T. Ec. 25:  $\Lambda - 8\pi p_0 = \frac{1}{R^2}$   
 T. Ec. 26:  $ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + dt^2$   
 T. Ec. 28:  $\lambda = \nu = 0$   
 T. Ec. 29:  $ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + dt^2$   
 T. Ec. 30:  $\Lambda = \frac{3}{R^2}$   
 T. Ec. 31:  $8\pi p_0 = \Lambda - \frac{1}{R^2}$   
 T. Ec. 32:  $8\pi\rho_{00} = -\Lambda - \frac{3}{R^2}$   
 T. Ec. 33:  $4\pi(\rho_{00} + p_0) = \frac{1}{R^2}$   
 T. Ec. 34:  $4\pi(\rho_{00} + 3p_0) = \Lambda$   
 T. Ec. 35:  $\Lambda = \frac{1}{R^2} = 4\pi\rho_0$   
 T. Ec. 36:  $\rho_{00} = 3p_0$   
 T. Ec. 37:  $\Lambda = \frac{3}{2R^2} = 8\pi\rho_{00}$

**Figura 10**

En Robertson (1933)

Elemento de línea 1: Ec. 1.1:  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ ,  $(\mu, \nu = 1,2,3,4)$   
 Elemento de línea 2: Ec. 2.1:  $ds^2 = c^2 dt^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ,  $(\alpha, \beta = 1,2,3)$   
 Elemento de línea 3: Ec. 2.2:  $ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) du^2$   
 Ec. de Einstein: Ec. 1.2:  $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \left( \frac{R}{2-\lambda} \right) = -\kappa T_{\mu\nu}$   
 Ec. de conservación 1.3:  $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g} T_\mu^\nu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} T^{\nu\rho} = 0$   
 Ecs. de Friedmann:  
 Ec. 3.2:  $\kappa\rho c^2 = -\lambda + 3(k + R'^2/c^2)/R^2$   
 $\kappa p = -\lambda - 2R'R/c^2 - (k + R'^2/c^2)/R^2$   
 Ec. 3.3:  $R\rho' + 3R'(\rho + p/c^2) = 0$

**Figura 11**

En Friedman (1983)

h: Métrica espacial degenerada que define distancias entre eventos simultáneos en teorías con estructura espacio-tiempo no relativista o parcialmente relativista.  
 $h(dt,w)=0$ : Condición de ortogonalidad que establece que la métrica espacial h anula al 1-forma temporal dt, garantizando la separación entre estructura espacial y temporal.  
 $D(h)=0$ : Condición de compatibilidad que indica que la derivada covariante preserva la métrica espacial h.  
 $D(dt)=0$ : Condición que establece que el 1-forma temporal dt es covariantemente constante, asegurando la existencia de un tiempo absoluto o preferido.  
 V: Campo vectorial temporal que representa el flujo del tiempo o los observadores fundamentales del espacio-tiempo.  
 $dt(V)=1$ : Condición de normalización que fija a V como el campo dual del tiempo absoluto definido por dt.  
 $D(V)=0$ : Condición que indica que el campo temporal V es covariantemente constante, característica de estructuras espacio-temporales inerciales.  
 Potencial gravitacional: Función escalar  $\phi$  que codifica el campo gravitatorio en teorías newtonianas, de la cual se deriva la aceleración gravitacional.

- Ec. de Poisson: Ecuación diferencial que relaciona el potencial gravitacional con la densidad de materia, constituyendo la ley fundamental de la gravitación newtoniana.
- $ds^2$  Mink: Elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowski, que describe un espacio-tiempo plano sin gravitación en relatividad especial.
- $\eta$ : Tensor métrico de Minkowski, con firma lorentziana, que define distancias e intervalos espacio-temporales en relatividad especial.
- Ley Geodésica: Ecuación de movimiento que describe trayectorias libres como curvas geodésicas del espacio-tiempo determinado por una conexión afín.
- $D(g)=0$ : Condición de compatibilidad métrica que establece que la conexión preserva el tensor métrico  $g$ , característica de las conexiones de Levi-Civita.
- $ds$ : Elemento de línea que representa la distancia infinitesimal entre dos eventos del espacio-tiempo, independiente del sistema de coordenadas.
- Tensor métrico  $g$ : Campo tensorial simétrico que define la geometría del espacio-tiempo y permite calcular intervalos, ángulos y volúmenes.
- Conexión métrica: Conexión afín compatible con el tensor métrico, utilizada para definir paralelismo y derivación covariante sin alterar longitudes.
- $\langle 1,3 \rangle$  o  $\langle 3,1 \rangle$ : Firma del tensor métrico lorentziano, que indica una dimensión temporal y tres espaciales (o viceversa, según la convención).
- Ec. Friedmann: Ecuación dinámica que gobierna la evolución del factor de escala en modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos.
- $ds^2$  GR: Elemento de línea general de la relatividad general, que describe un espacio-tiempo curvo determinado por el tensor métrico y las ecuaciones de Einstein.