Distinguiendo diagramas infinitos*

Distinguishing Infinite Diagrams

José Seoane†

Resumen

La literatura filosófica ha distinguido excepcionalmente entre la *demostración* matemática y su *expresión*. La importancia de vindicar tal distinción reside en que las propiedades de la expresión no necesariamente lo son de la demostración. Esta afirmación alcanza naturalmente a las demostraciones heterogéneas; en ellas, por definición, la expresión combina componentes visuales y componentes lingüísticos. La distinción apuntada resulta especialmente valiosa si se intenta elucidar ciertas propiedades de los diagramas o figuras que intervienen en tales contextos. El objetivo de estas notas es concentrar la atención sobre una propiedad particular (la infinitud) y esbozar una clasificación rudimentaria de diagramas infinitos.

Palabras clave: demostración heterogénea - diagramas infinitos - filosofía de la práctica matemática

Abstract

Philosophical literature has exceptionally distinguished between mathematical *proof* and its expression. The importance of vindicating such distinction lies in the fact that the properties of the expression are not necessarily properties of the proof. This statement is indeed applied to heterogeneous proofs; in them, by definition, the expression combines visual components and linguistic components. This distinction is particularly valuable if the intention is to elucidate certain properties of the diagrams or figures involved in such contexts. The aim of these notes is to focus the attention on a particular property (infinity) and outline a raw classification of infinite diagrams.

Keywords: heterogeneous proofs - infinite diagrams - philosophy of mathematical practice

* Recibido: 27 de junio de 2017. Aceptado con revisiones: 2 de octubre de 2017.
† Universidad de la República, Uruguay. Para contactar al autor, por favor, escribir a: seoanejose2010@gmail.com.
Metatheoria 9(1)(2018): 1-11. ISSN 1853-2322. eISSN 1853-2330.

1. Introducción

La literatura filosófica ha distinguido –en raras pero valiosas ocasiones– entre la *demostración* matemática y su *expresión*.[1] Esta última podría usar, por ejemplo, el idioma español, además de las notaciones técnicas universales; una traducción al francés o al ruso, nuevamente a vía de ejemplo, varía en un sentido obvio la expresión, pero no genera una nueva demostración. La identidad de la demostración se mantiene –y de hecho lo hace aun a través de modificaciones menos insustanciales que la comentada–, y ello evidencia la importancia de retener la distinción referida: las propiedades de la expresión no necesariamente lo son de la demostración. ¡Excepto, claro está, si, como de hecho ha sucedido, se identifican demostración y expresión![2] Desde una perspectiva filosófica, la distinción entre ambas nociones es confortada por sólidos argumentos –algunos de ellos vinculados a las razones arriba sugeridas.

Cuando se trata de demostraciones heterogéneas, por definición, la expresión combina componentes visuales y componentes lingüísticos; tal carácter mixto impacta en la propia dinámica demostrativa. No obstante, la distinción apuntada mantiene plenamente su valía; en particular, si se intenta elucidar ciertas propiedades de los diagramas o figuras que intervienen en tal contexto.[3] Ese es precisamente el propósito de estas notas en relación con una propiedad específica: la infinitud.

El trabajo se organiza en siete secciones. En la sección 2 se discute el contraste finito-infinito en relación al componente diagramático en el contexto heterogéneo, proveyéndose un modelo elemental orientador del análisis. En la sección 3 se proponen algunos ejemplos de diagramas infinitos. En las secciones 4 y 5 se refina el análisis, distinguiéndose dos tipos o clases de diagramas infinitos. En la sección 6 se analizan dos objeciones posibles a los desarrollos precedentes. La última sección revisa ciertas consecuencias de la admisión de diagramas infinitos, especialmente, en relación con las propiedades de la demostración matemática.

2. Diagramas: la expresión y lo expresado

Algunas aclaraciones previas –aunque tediosas– son imprescindibles. En el contexto diagramático, ¿qué significan finito e infinito? Se posee una noción clara de cómo aplicar tales predicados a elementos lingüísticos: atendiendo a la cardinalidad del conjunto de unidades sintácticas que lo conforman. En modo análogo puede operarse en relación con los diagramas; es evidente entonces que se necesita explicitar su sintaxis. Desde un punto de vista intuitivo, pueden concebirse perfectamente las estructuras sintácticas correspondientes a las diversas construcciones diagramáticas. Esta línea de pensamiento ha conducido más lejos: pueden definirse, en forma recursiva, la sintaxis de dichas construcciones, de forma análoga al tratamiento de las fórmulas en los sistemas lingüísticos formales corrientes.[4]

Así como se señaló que es pertinente distinguir entre una demostración y su expresión, debe distinguirse –preservando la terminología– entre un diagrama y su expresión. Dado un diagrama podría diferenciarse entonces entre, por una parte, la grafía y, por otra, la estructura por ella denotada. Puede pensarse así, dado un diagrama, en dos acepciones o interpretaciones de este: un diagrama 1 y un diagrama 2. El diagrama 1 correspondería a la grafía; el diagrama 2 consistiría en la estructura o

---

1 Ver Chateaubriand (2005).

2 Un agudo análisis de esta cuestión en relación, precisamente, al supuesto carácter finito de las demostraciones puede encontrarse en Chateaubriand (2005), cap. 19.

3 Se usarán indistintamente los vocablos “diagrama” y “figura” para referirse a los componentes visuales en este contexto; eso no equivale a asumir la imposibilidad de distinguirlos, sino solo que, a los efectos de esta discusión, es posible reunirlos en una sola categoría.

4 Tales definiciones pueden apreciarse, por ejemplo, para los diagramas de Venn en Shin (1993).

construcción denotada. Un ejemplo permitirá resaltar el contraste. Tómese el caso de un triángulo equilátero. El dibujo de este en el pizarrón es un diagrama 1; el triángulo representado por ese dibujo es un diagrama 2. Expresado intuitivamente: el diagrama 1 puede, por ejemplo, borrarse con un paño húmedo, no así el diagrama 2.

Una cuestión importante, cuando se discuten las propiedades de finitud e infinitud, es explicitar cuál de los dos niveles se considera. ¿Se refiere a los diagramas 1? ¿Se trata de los diagramas 2?

Si se reduce la cuestión al nivel supra-1, parece evidente que todos los diagramas son finitos. ¿Cómo podría dibujarse un diagrama infinito? Es decir, ¿cómo podría componerse en una página una estructura visual conformada por infinitas ocurrencias de elementos de un alfabeto o repertorio de componentes diagramáticos? Ahora bien, si la pregunta se formula respecto del nivel supra-2, la respuesta dista de ser trivial. Es más, podría sostenerse que existen diagramas infinitos.[5] Es decir, estructuras o construcciones infinitas, denotadas por ciertos diagramas 1. En adelante, cuando se hable de "diagrama" se entenderá que el mismo posee ambas dimensiones (supra 1 y supra 2). Las reflexiones que siguen procuran desarrollar esta idea.[6]

3. Algunos ejemplos

Conviene comenzar revisando algunos ejemplos. El teorema Cantor-Schöeder-Bernstein afirma que si card(A) ≤ card(B) y card(B) ≤ card(A) entonces card(A) = card (B). Demostraciones heterogéneas de este teorema son frecuentes.[7] Se reproducirán aquí dos diagramas que se usan en sendas demostraciones del teorema anterior; no se expondrán las mismas –el lector interesado podrá consultar las obras de teoría de conjuntos referidas. Sí se analizará cuidadosamente el trabajo que tales diagramas realizan.

Ejemplo 1:

Para demostrar el teorema referido, puede ser útil previamente demostrar la siguiente aserción: si $C \subseteq B \subseteq A$ y card(A) = card(C), entonces card(A) = card(B). Dado que card(A) = card(C), existe una función biyectiva $f: A \rightarrow C$.

Se puede construir así una serie de conjuntos, siendo $A_0 = A - B$, $A_1 = f[A_0]$, $A_2 = f[A_1]$,...

Para imaginar esta construcción, ayuda sustantivamente el diagrama:

5 La denominación aparece, por ejemplo, en un muy interesante artículo de Feferman (2012).

6 Podría objetarse la pertinencia de aplicar el término "diagrama" a las "estructuras" o "construcciones" arriba referidas. Es decir, los diagramas 2. El punto es profundo y merece una discusión más extensa. Pero a los efectos del contexto presente quizá baste decir que el único aspecto que se ha pretendido captar es que tales construcciones o estructuras son *comunicadas vía diagramática*, y esto supone las mismas son dadas explotando los recursos propios de la codificación visual de la información (aunque no en forma exclusiva). En una forma grosera y aproximada, los diagramas 2 conforman lo "representado" por los diagramas 1. Resulta luego sensato asumir, en el contexto de la contribución de la representación visual a la demostración matemática, los diagramas *tout court* poseen ambas dimensiones.

7 Se podría cuestionar el carácter heterogéneo de las demostraciones referidas. Si se entiende la heterogeneidad en su acepción *expresiva*, es decir, en relación a la relevancia del componente visual en la comprensión o intelección de la estrategia inferencial correspondiente, se justifica plenamente atribuirles aquel carácter. Por supuesto, puede optarse por aplicar tal predicado, exclusivamente, cuando aquella relevancia es *inferencial*, es decir, cuando dicho componente juega un papel preponderante en la justificación del resultado en cuestión. En el contexto de este trabajo, se usará en general "heterogeneidad" en la primera acepción, aunque algunos casos ilustran además en forma indiscutible la segunda acepción.

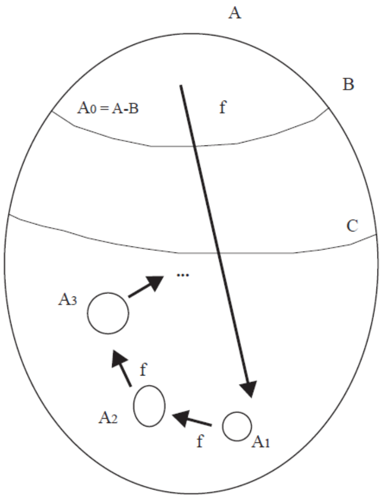


Diagrama 1.

Sea D = ⋃A_i con i siendo un número natural. Obviamente, D ⊆ A.

Sea f*: A → B, definida así:

f*(a) = f(a) si a ∈ D

f*(a) = a si a ∉ D.

¿Cómo saber qué f* –tal cual está definida arriba– efectivamente toma sus valores en B?

Porque si a ∈ D, f*(a) = f(a), luego f(a) ∈ C y como C ⊆ B, es decir f*(a) ∈ B y si a ∉ D, f*(a) = a, luego a ∉ A – B, luego a ∈ B, es decir, f*(a) ∈ B. Se puede demostrar que f* es una biyección de A en B, es decir, card(A) = card(B). Y este resultado, como se dijo, permite demostrar el teorema de Cantor-Schöeder-Bernstein.[8] Pero, a los fines presentes, bastará concentrarse en la construcción y el diagrama respectivo.

Una estrategia alternativa para demostrar tal teorema puede apelar a otro diagrama:[9]

Ejemplo 2:

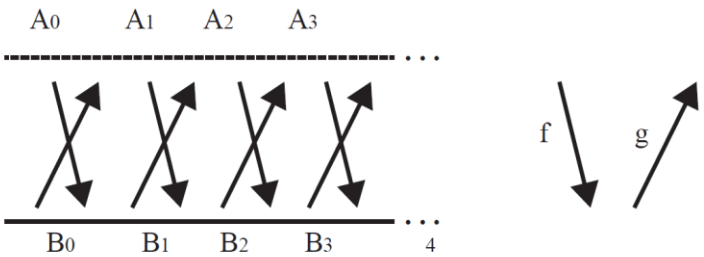


Diagrama 2.

Asumiendo la hipótesis del teorema, se tiene que card(A) ≤ card(B) (y esto equivale a que exista una función uno a uno de A en B) y que card(B) ≤ card(A) (y esto implica que existe una función uno a uno de B en A). Denomínese f a la primera y g a la segunda. El diagrama 2 permite visualizar el siguiente proceso. Se toma A_0 = A – g[B] y B_0 = B – f[A]. Luego se van construyendo los As y Bs siguientes así: B_1 = f[A_0] y A_1 = f[B_0] y luego B_2 = f[A_1] y A_2 = f[B_1] y así sucesivamente –es evidente cuánto ayuda a comprender la construcción la ilustración precedente. Nuevamente es necesario un

[8] La demostración heterogénea referida se encuentra en Malitz (1987).

[9] La demostración heterogénea referida se encuentra en Kleene (1974).

arduo trabajo deductivo posterior para arribar al resultado pretendido, pero el punto sobre el que se quiere reflexionar es la construcción matemática y su contrapartida visual.

Si se piensa los ejemplos 1 y 2 en clave, por así decir, supra-2, puede advertirse una cierta peculiaridad: el diagrama consiste en una construcción *infinita*. La construcción de la serie de las As en el Ejemplo 1 y de las As y Bs en el Ejemplo 2 no está acotada. Es ese proceso sin término la denotación de los respectivos diagramas 1 y, en tal sentido, puede decirse que los diagramas 2 correspondientes son infinitos. Si se quiere obtener aquí una caracterización de la infinitud semejante –en términos de precisión– a la ofrecida en el caso sintáctico, podría explicitarse así: la infinitud es una propiedad de la estructura representada. ¿Qué hace infinita la estructura particular en cuestión? El número de iteraciones de la operación funcional –tomadas como actualmente dadas–. Por otra parte, como es evidente, en la caracterización arriba especificada, los diagramas 1 son finitos. ¿Cómo logran representar construcciones infinitas?

Una inspección aún superficial de estos diagramas 1 permite identificar –rápidamente– el componente sintáctico encargado de señalizar el carácter abierto o inconcluso del proceso representado: los puntos suspensivos. Estos diagramas se encuentran insertos en los respectivos contextos heterogéneos y la demostración (vía lingüística) se encarga de precisar en cada caso el significado de la figura correspondiente –no debiera subestimarse, por ejemplo, el papel de los subíndices, que otorgan sentido fino al concepto "infinito"–.

Podría intentarse quizá una caracterización general: un diagrama infinito es aquel cuya estructura sintáctica (diagrama 1) remite o denota una construcción o proceso infinito (diagrama 2). Esta caracterización general, en principio, resulta una razonable aproximación a la cuestión. Pero una mirada más atenta a los ejemplos anteriores permite hilar más fino. Los casos 1 y 2 ejemplifican, obviamente, la categoría general de diagramas infinitos; pero, ¿no ejemplifican una clase particular de diagramas infinitos?

4. Distinguiendo diagramas infinitos (I)

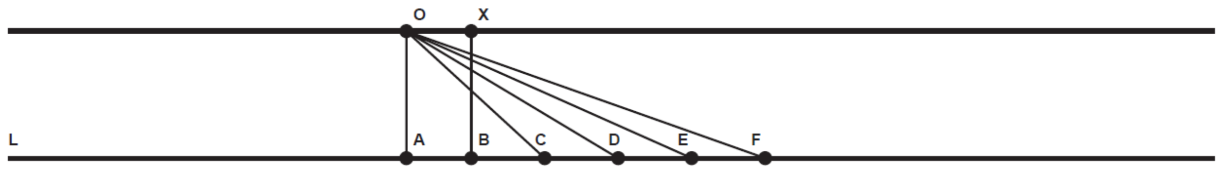
Refiriéndose a uno de los ejemplos arriba examinados, Solomon Feferman (2012, p. 372) lo explica con precisión y elegancia: se trata de una clase de diagramas, muy frecuentes en la matemática moderna, que refieren a una "configuración infinita única" exhibiendo "una parte finita típica de esa configuración" y apelando para hacerlo al "uso de la elipsis", a través de los puntos suspensivos o expresiones como "y así sucesivamente". Estas observaciones permiten, asumida la caracterización general, identificar ciertas peculiaridades relevantes de esta economía diagramática particular. En general, podría extraerse una estrategia de clasificación o discriminación de los diagramas infinitos, donde cada clase se identificaría especificando, por una parte, las características de la construcción referida (diagrama 2) y, por otra, examinando cómo la dimensión sintáctica refiere a ella o la representa (relación diagrama 1-diagrama 2).

En particular, a los efectos de identificar esta modalidad particular, se escoge cierta característica de la estructura definida (su unicidad) así como la estrategia expresiva puesta en obra (construcción típica y parcial). Esta afirmación no implica, obviamente, las estructuras referidas en los diversos miembros de esta clase coincidan en todas sus características, ni las estrategias expresivas correspondientes sean idénticas. Siguiendo la observación de Feferman, podría denominarse a los diagramas que ejemplifican esta modalidad, diagramas *elípticos*. Dos ejemplos ilustrarán elocuentemente la diversidad de estructuras y estrategias expresivas que conforman naturalmente esta clase.

El primer ejemplo es aportado por un razonamiento geométrico de Kant en su *Monadología física*, discutido finamente por Torretti (1980):[10]

[10] Se usará aquí la reconstrucción y análisis de Torretti en su reconocida obra sobre el filósofo de Könisberg (Torretti 1980).

Ejemplo 3:

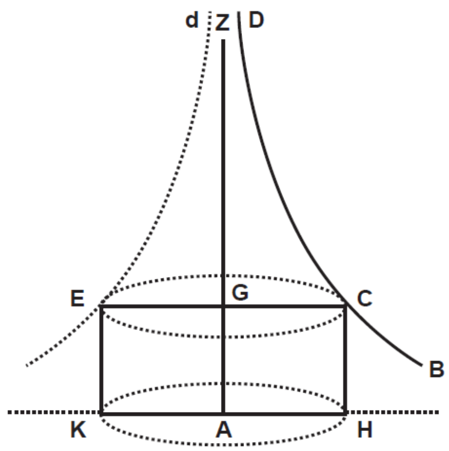


Se construye una recta y se marcan puntos sucesivos A, B, C,... infinitamente. Sobre el punto A se levanta la perpendicular A0 y sobre B otro perpendicular BX. Se trazan las rectas OC, OD,... La idea es que tales rectas cortarán BX entre B y X. No interesa continuar la demostración kantiana pues con lo dicho basta para advertir la construcción relevante para la discusión presente.

Es evidente que se trata de una construcción única, resultado de la iteración infinita de un procedimiento geométrico, como actualmente dada. ¿Cómo expresa el diagrama *1*, en este caso, la construcción infinita? La estrategia expresiva consiste en exhibir las construcciones típicas, y estas poseen características diversas a la aplicación funcional. No hay, en este caso, "marcador" sintáctico en la sintaxis diagramática que exprese la iteración. Esta es comunicada vía la sociedad visual-lingüística; la imagen, por sí sola, resulta incapaz de trasmitirla. En general, la cooperación heterogénea es indispensable, pero resulta especialmente evidente en el caso de procurar denotar estructuras o construcciones infinitas. En síntesis, dadas sus características estructurales y expresivas, es este un caso paradigmático de la modalidad arriba caracterizada.

El segundo ejemplo generó perplejidad y admiración en la historia de la geometría. Se trata de la obtención –por Torricelli– de un resultado sorprendente: "In 1641 Evangelista Torricelli discovered that a certain solid of infinite lenght, which he called the 'acute hyperbolic solid', has a finite volume" (Mancosu & Vailati 1991, p. 50).[11] La figura usada en la demostración es la siguiente:[12]

Ejemplo 4:



Siguiendo la terminología de la época, el Teorema en cuestión afirma, básicamente, que un sólido hiperbólico agudo, infinitamente largo, cortado por un plano perpendicular al eje conjuntamente con

[11] Asimismo, puede consultarse Mancosu (1996).

[12] La figura se ha tomado de Mancosu & Vailati (1991). La formulación del resultado y la demostración siguen casi literalmente la exposición de estos autores; en algunos casos se han eliminado detalles o explicaciones, ya que el objetivo de este trabajo no es el análisis de la demostración sino de ciertas peculiaridades del diagrama usado por la misma. El lector interesado puede leer una exposición técnica y filosóficamente profunda en el artículo y libro referidos.

un cilindro como se encuentra en la figura, es igual al cilindro recto cuya base es un círculo cuyo diámetro es igual al de la hipérbola y cuya altura es igual al radio de la base del sólido hiperbólico. En términos de la figura inmediatamente precedente lo que el Teorema pide es demostrar que el sólido conformado por el cilindro FEDC conjuntamente con el generado por la rotación de la hipérbola alrededor del eje AB, es igual al cilindro de altura AC y cuya base es el círculo de diámetro HA=2AS. En forma resumida, la demostración (basada en indivisibles) se desarrolla así. Se demuestra un Lema que afirma que la superficie lateral del cilindro inscripto POMN, cuyo eje coincide con AB y son sus bases los círculos de diámetros OM y PN, es igual al área de un círculo cuyo radio es AS. Este resultado es general, es decir, vale para cualquier cilindro inscripto como el anterior. Luego el sólido hiperbólico agudo es concebido como conformado por todos sus indivisibles cilíndricos, es decir, todas las superficies laterales del tipo POMN. El cilindro ACIH a su vez se entiende conformado por todos sus indivisibles circulares. Cada punto N del sólido infinitamente largo, determina un único indivisible en dicho sólido al cual pertenece y éste indivisible cilíndrico determina un único indivisible circular en el cilindro ACIH. Cada indivisible del sólido infinitamente largo (una superficie lateral del tipo POMN) posee entonces la misma área que un indivisible del cilindro ACIH. Como los indivisibles de las dos figuras son iguales y están asociados uno a uno, por el principio fundamental de la teoría de los indivisibles, los volúmenes de las dos figuras serán iguales. Es decir, el sólido infinitamente largo será igual en volumen al cilindro finito.

Se trata indiscutiblemente de una construcción única; la estrategia expresiva enseña una parte finita de la hipérbole DM y la operación constructiva de rotación sobre el eje AB que protagoniza, denotando la dimensión infinita de aquella y, luego, el carácter infinito del sólido generado. La singularidad de la estructura denotada reside en su carácter continuo, contrastando con el carácter discreto de los dos primeros ejemplos. En relación a la estrategia expresiva, nuevamente la conjunción visual-lingüística resulta indispensable. Dadas sus características, la figura de Torricelli puede alojarse razonadamente en la modalidad elíptica.

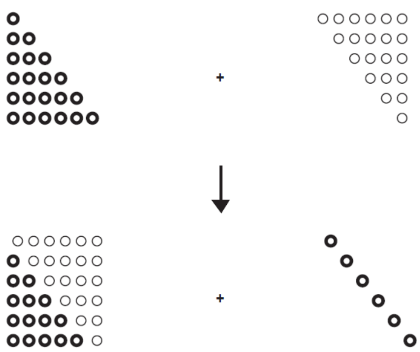
5. Distinguiendo diagramas infinitos (II)

Ahora bien, ¿es la modalidad arriba descripta la única? La respuesta es: no. Considérese el siguiente caso:

Ejemplo 5:[13]

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$



[13] Ver Nelsen (2000), p. 83.

En el contexto de una demostración heterogénea, esta figura no pretende contribuir a echar luz sobre un caso particular (es decir, no procura mostrar la corrección de la ecuación para el valor 6); su trabajo es colaborar en la generación de convicción legítima sobre la afirmación general que se pretende demostrar –explicitada lingüísticamente al comienzo–.

Luego, aunque nuevamente el diagrama *1* es finito, se propone evidenciar, a diferencia del caso anterior, *a través de una cierta construcción, una estrategia constructiva susceptible de ser iterada infinitamente*. Podría decirse que, contrastantemente con la modalidad anterior, no se trata de representar una *estructura única* sino *las instancias de un procedimiento*; la infinitud viene dada por el número de aplicaciones del procedimiento o esquema. ¿Cómo lo dice el diagrama *1*? A través de uno o más casos que ilustran el procedimiento de construcción de las instancias referidas. Por este rasgo, cabría denominar a los diagramas que conforman esta clase, diagramas *paradigmáticos*.

En el caso en consideración no hay ningún "indicador" o "marcador" sintáctico específico que advierta el carácter de "instancia" o de "caso". Nuevamente, es resultado del trabajo heterogéneo.

La siguiente variante expresiva de la demostración anterior –debida a Polya (Chateaubriand 2005) –[14] hace evidente la pretensión del diagrama (en el contexto heterogéneo) de ilustrar un método constructivo infinitamente iterable:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n^2 + n}{2}$$

•

• •

• • •

• • • •

:

:

• • • • .... •

¿Cuánto sería el cuadrado entero? Obviamente, n^2. Pero si se lo divide a la mitad –es decir, $n^2/2$– falta la mitad de los n elementos de la diagonal –es decir, $n/2$– para obtener la suma 1+2+3...+n. Luego tal suma es igual a $(n^2 + n)/2$.

La peculiaridad semántica anotada quizá puede aparecer mejor perfilada en el plano visual en la demostración heterogénea que se apoya en el siguiente diagrama, compuesto por una serie de figuras (pues las infinitas aplicaciones del método constructivo aparecen explicitadas en el diagrama *1* mediante el familiar "marcador" sintáctico de los puntos suspensivos):

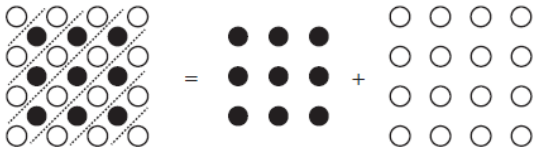
Ejemplo 6:[15]

[14] Chateaubriand (2005) le dedica a esta demostración un fino análisis.

[15] Ver Nelsen (1993), p. 75.

$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$

$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$



$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$$

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + ... + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2$$

Los últimos casos ejemplifican así una diferencia (respecto de modalidad elíptica) en la estructura semántica denotada o referida. El contraste entre ambas podría resumirse así: en la primera modalidad, tal estructura consiste en la iteración infinita de una operación, en la segunda modalidad, reúne las infinitas instancias de una estrategia o procedimiento constructivo. En ambos casos, la naturaleza infinita está perfectamente determinada. Como puede aprenderse a partir de los ejemplos considerados, las formas de expresar estas estructuras pueden variar significativamente. En síntesis, si estas consideraciones son correctas, podría distinguirse dos clases de estructuras o procesos infinitos referidos y, a partir de tal contraste, dos tipos de diagramas infinitos –más allá de las similitudes y/o diferencias anotadas en el plano expresivo–.

5. Dos objeciones

La admisión de dos modalidades de diagramas infinitos proyecta la sombra de una duda doble. Por una parte, ¿es realmente sustentable la distinción? Podría argüirse que, en ambos casos, se itera infinitamente una estrategia expresada en el diagrama –¡y eso es todo!–. La diferencia apuntada –sostendría el crítico– resulta excesivamente sutil y, en definitiva, dudosamente relevante. Adviértase que, en el primer caso, la construcción como un todo es la pieza de evidencia usada en la trama demostrativa, mientras que, en el segundo caso, se presenta un "eslabón" (por así decir) de la cadena infinita y se le hace trabajar en un doble sentido: por una parte, es pieza de evidencia para un caso particular, y, por otra, ejemplifica en forma perspicua la estrategia que permitiría construir las infinitas instancias necesarias para la garantía justificacional de la aserción a demostrar –la construcción diagramática realiza ambos trabajos, conviene recordarlo, en el contexto heterogéneo–. Si estas consideraciones son correctas, el contraste aparentemente "local" entre una y otra modalidad impacta en el contexto "global" de la demostración, asumiendo los representantes de tales clases papeles diversos en términos justificacionales.

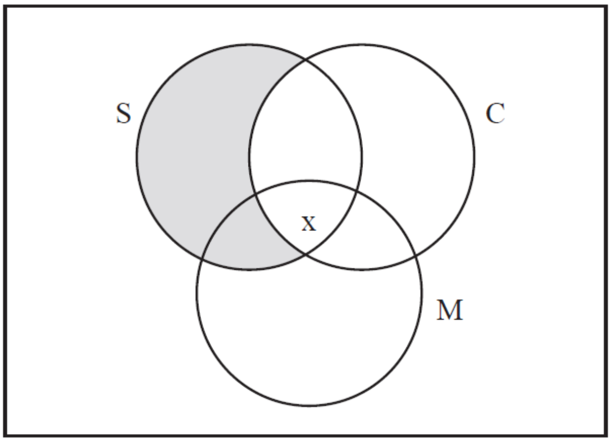
Por otra parte, si se aceptan los casos pertenecientes a la modalidad paradigmática como infinitos, ¿no se vuelven *todos* los diagramas infinitos? La respuesta es: no. He aquí un contraejemplo, es decir, un diagrama finito. Supóngase que se desea mostrar la corrección lógica del siguiente argumento:

Todas las sirenas son cantautoras.

Algunas melancólicas son sirenas.

Algunas cantautoras son melancólicas.

Para hacerlo puede apelarse a los diagramas de Venn:



Este diagrama no es infinito; no pertenece a ninguna de las clases de diagramas arriba caracterizadas. Ni refiere a una única configuración infinita, evidenciando una parte típica de esta, ni representa una estrategia constructiva, susceptible de ser iterada infinitamente; ninguna de estas tareas debe llevar adelante este último diagrama a los efectos de cumplir adecuadamente su trabajo en el contexto demostrativo analizado. Podría, no obstante, esgrimirse la eventual denotación, por parte de los términos representados, de clases infinitas. Más aún: ciertas consideraciones históricas respaldarían este aserto.[16] Sin embargo, tales consideraciones son perfectamente compatibles con la caracterización de dichos diagramas como finitos. No puede asumirse que las clases denotadas por los términos sean finitas y ello determina que ciertas formas de representarlas sean excluidas; se opta entonces por estrategias representacionales indiferentes a la finitud o infinitud de los términos. Luego, los diagramas en cuestión pueden, eventualmente, representar clases infinitas, pero no lo hacen necesariamente. Por lo tanto, no es una propiedad de estos referir a estructuras tales. Esa indiferencia aludida puede fácilmente reconocerse: si las sirenas o las cantautoras fueran clases finitas o infinitas, el diagrama de arriba no se modificaría.

6. Observaciones finales

Las consideraciones precedentes respaldan la admisión de una primera clasificación: diagramas finitos y diagramas infinitos. Asimismo, permiten avanzar en la identificación, entre estos últimos, de dos subclases: diagramas *elípticos* y *paradigmáticos*. La caracterización de estas dos categorías atiende, fundamentalmente, a ciertos rasgos selectos de la estructura denotada. El examen de los ejemplos estudiados permite, por otra parte, corroborar una cierta riqueza en las estrategias expresivas puestas en obra en los diversos casos. Quizá las diferencias advertidas podrían auspiciar una clasificación de los diagramas atendiendo, no ya fundamentalmente a rasgos de la estructura referida (diagrama 2), sino principalmente a propiedades de la relación entre diagrama 1 y diagrama 2. Independientemente de la elaboración de eventuales criterios clasificatorios, el examen de las estrategias expresivas utilizadas aparece como una tarea prometedora.

[16] En particular, esta sería la interpretación de Euler. Ver al respecto Sautter (2012).

En general, la caracterización tradicional de demostración asume la identificación de demostración y expresión, y otorga así propiedades de la última a la primera. Una de ellas es la finitud. Cuando se descree de aquella identificación, se puede pensar desprejuiciadamente la exigencia de finitud para la demostración. Los desarrollos que anteceden bien pueden servir para ilustrar, en un sentido perfectamente razonable, por qué podría hablarse de demostraciones infinitas –aunque, obviamente, sus expresiones sean finitas y, más aún, de una longitud finita muy reducida–. La testabilidad algorítmica ha sido asimismo otro rasgo tradicionalmente entendido como definitorio de la noción de demostración matemática; dicho más explícitamente, cada paso debería poder ser evaluado mecánicamente, es decir, una máquina (una computadora), en un número finito de pasos, debiera poder determinar si ese paso es o no legítimo. ¿Demostraciones infinitas pueden ser testables en tal sentido?[17]

Como el lector advierte, la admisión de las demostraciones heterogéneas (en el sentido inferencial) y, en especial, de aquellas que hacen uso sustantivo de diagramas infinitos, apareja una discusión profunda acerca de los rasgos definitorios de la demostración matemática en general. Pero, ciertamente, esa es otra historia.

Bibliografía

Chateaubriand, O. (2005), *Logical Forms*, Campinas: CLE.

Feferman, S. (2012), "And so On...: Reasoning with Infinite Diagrams", *Synthese* 186: 271-386.

Kleene, S. C. (1974), *Introducción a la metamatemática*, Madrid: Tecnos.

Malitz, J. (1987), *Introduction to Mathematical Logic*, New York/Heidelberg/Berlin: Springer.

Mancosu, P. (1996), *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth* Century, Oxford: Oxford University Press.

Mancosu, P. y E. Vailati (1991), "Torricelli's Infinitely Long Solid and its Philosophical Reception in the Seventeenth Century", *Isis* 82(1): 50-70.

Nelsen, R. (1993), *Proofs without Words. Exercises in Visual Thinking*, Washington: The Mathematical Association of America.

Nelsen, R. (2000), *Proofs without Words II. More Exercises in Visual Thinking*, Washington: The Mathematical Association of America.

Sautter, F. (2012), "Dois novos métodos para a teoria de silogismo; método diagramático e método equacional", *Notae Philosophicae Scientiae Formalis* 1(1): 14-22 (accesible en: http://gcfcf.com.br/pt/revistas/vol1-num1-maio-2012/).

Shin, S.-J. (1994), *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge: Cambridge University Press.

Torretti, R. (1980), *Kant*, Buenos Aires: Charcas.

[17] Estos desarrollos referidos a finitud y a la relación finitud y testabilidad se encuentran, esencialmente, en Chateaubriand (2005).