Sobre la relevancia de la tesis de Turing[*]

On the Relevance of Turing's Thesis

Aldana D'Andrea[†]

Resumen

En este artículo intentamos dar cuenta de la relevancia de la tesis de Turing sobre el concepto de cálculo efectivo en relación con la tesis de Church sobre el mismo tema. Si bien ambas tesis son extensionalmente equivalentes y proporcionan, por lo tanto, una misma solución al *Entscheidungsproblem* de Hilbert, hay una especie de acuerdo en considerar que la formulación de Turing es la más satisfactoria o la más convincente. La pregunta es por qué se da tal acuerdo. En respuesta a esta pregunta destacamos la complejidad del *Entscheidungsproblem* e indagamos en qué medida las propuestas de Church y Turing captan dicha complejidad.

Palabras clave: tesis de Turing - cálculo efectivo - Entscheidungsproblem

Abstract

In this paper we seek to explain the relevance of Turing's thesis about the concept of effective calculation in relation to Church's thesis about the same topic. Even though both theses are equivalent extensionally and provide therefore the same solution to Hilbert's *Entscheidungsproblem*, there is a kind of agreement in considering that Turing's formulation is the most satisfactory or the most convincing. The question is why such an agreement exists. In response to this question particular attention is given to the complexity of the *Entscheidungsproblem* and to the extent to which Church and Turing's proposals catch that complexity.

Keywords: Turing's thesis - effective calculation - Entscheidungsproblem

---

[*] Recibido: 16 de Febrero de 2016. Aceptado: 19 de Septiembre de 2016.

[†] Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC)/Universidad Nacional de Córdoba (UNC)/ Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. Para contactar a la autora, por favor, escribir a: aldana.dandrea@gmail.com.

Metatheoria 7(2)(2017): 31-39. ISSN 1853-2322.

1. El problema fundamental de la lógica matemática

Para la matemática el siglo XX no empezó sino hasta que Hilbert pronunció sus ya 23 famosos problemas y su característico optimismo: en matemáticas no hay *ignorabimus* (Hilbert 1902). La forma en que la matemática accedería a tal privilegio cognoscitivo sería desarrollada en lo que conocemos como el programa de Hilbert. De acuerdo a éste, todo el conocimiento matemático debería ser expresado en un sistema axiomático formal completo, consistente y decidible; para asegurar estas condiciones críticas Hilbert desarrolló su punto de vista finito, el cual, en principio, aportaría pruebas constructivas de las propiedades metamatemáticas de los sistemas formales.

La matemática de las primeras décadas del siglo XX estuvo signada así por las preocupaciones epistemológicas de Hilbert y su escuela de Göttingen, en particular, por las exigencias metodológicas finitistas y por la necesidad de asegurar el concepto de demostrabilidad en un sistema formal. Como parte del desarrollo del mismo programa se presenta un desafío particular, el *Entscheidungsproblem*, el cual plantea el problema del cálculo efectivo, o sea, el problema de hallar un procedimiento general o algorítmico de decisión.

El *Entscheidungsproblem* puede ser definido equivalentemente en términos de validez y satisfabilidad (Hilbert & Ackermann 1950) y también en términos de demostrabilidad en un sistema formal: ¿existe un método efectivo para determinar si una fórmula de Lógica de Primer Orden (LPO) dada es válida o, alternativamente, satisfacible? ¿Existe un método efectivo para determinar si, dadas ciertas fórmulas de LPO consideradas como premisas y dada una fórmula considerada como conclusión, esa conclusión es demostrable desde las premisas utilizando las reglas de prueba de LPO? Ya Hilbert y Ackermann señalaban en 1928 que la equivalencia entre la pronunciación en términos de validez o satisfabilidad no es problemática en absoluto; por definición una fórmula A es válida si y sólo si ¬A no es satisfacible, mientras que la última equivalencia referida a la demostrabilidad recién pudo probarse luego de que Gödel definiera la noción de consecuencia lógica en términos de validez en medio del desarrollo de su teorema de completud (1929). Dado el programa de axiomatización formal y finita de las teorías y la presunción de la completud de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead –la obra monumental del logicismo– podría pensarse en los axiomas de la teoría como las premisas de una inferencia y constatar que esta última pronunciación del problema en términos de validez señala que una solución positiva del *Entscheidungsproblem* habilitaría, al menos en principio, a la reducción de toda la matemática a un cálculo mecánico: "The very day on which the undecidability does not obtain any more, mathematics as we now understand it would cease to exist; it would be replaced by an absolutely mechanical prescription" (Gandy 1988, p. 62).

Se entiende así que Hilbert y Ackermann hayan caracterizado al *Entscheidungsproblem* como "the main problem of mathematical logic" (Hilbert & Ackermann 1950, p. 113). Este problema dejó planteado no sólo un problema lógico matemático sino también, y sobre todo, una cuestión filosófica que inquieta a muchos y que, como observó Hilbert, afecta la esencia misma del pensamiento matemático (Hilbert 2005, p. 113): o bien el conocimiento matemático se desarrolla en un ámbito que trasciende los métodos efectivos, o bien puede ser desarrollado por una máquina y no hay nada esencialmente humano y creativo en él.

1.1. El problema conceptual y la tesis de Church

Para poder resolver el problema lógico matemático planteado por el *Entscheidungsproblem* bastaría con encontrar un problema de LPO o matemático algorítmicamente insoluble; de ello se seguiría, evidentemente, una respuesta negativa al problema general de la decisión. Sin embargo, cualquier abordaje del problema lógico matemático requeriría de una previa aclaración conceptual: ¿qué es un cálculo efectivo? o, equivalentemente y en términos más familiares, ¿qué es un cálculo algorítmico? Si bien el término *algoritmo* fue empleado durante más de 2000 años en la historia de la matemática, su manejo fue enteramente práctico; la comprensión del término se restringió así a ejemplos de procedimientos de cálculo que habían sido aceptados como *algorítmicos*, pero sin contar con una formulación exacta y general de lo que un algoritmo es y cuál es la extensión precisa de la clase de procedimientos algorítmicos. Por consiguiente, el planteo del *Entscheidungsproblem* puso en evidencia la necesidad conceptualizar con rigurosidad lo que hasta el momento era sólo una noción intuitiva, informal y vaga, aunque funcionalmente práctica.

Quizá debido a la agudeza con la que Hilbert y su escuela habían planteo su programa finitista y por la relevancia del carácter decidible adjudicado al ideal de prueba formal, una de las primeras aproximaciones a la caracterización de lo efectivo se dio mediante la noción de recursividad adoptada por Hilbert para identificar su punto de vista finito: "The method of search for the recursions required is in essence equivalent to that reflection by which one recognizes that the procedure used for the given definition is finitary" (Hilbert 1967, p. 388). De acuerdo a esta propuesta, un entendimiento adecuado del concepto de procedimiento finito demandaría una formalización de dicha noción a la luz de la recursividad. Restaba, por supuesto, un esclarecimiento de la noción metamatemática intuitiva de finitud -tal como la empleaba Hilbert- y una precisión sobre cuál es el alcance de la recursión, o sea, una determinación de la clase de funciones recursivas.

Gödel, siguiendo las restricciones finitistas de la metamatemática hilbertiana, fue quien primero aportó una definición precisa de lo que actualmente llamamos la clase de funciones recursivas primitivas y la utilizó en la resolución de su teorema de incompletud (1931). Unos pocos años después, Gödel, siguiendo los resultados de Herbrand, extendió la noción de recursividad para caracterizar una clase más amplia de funciones, las funciones recursivas generales o funciones recursivas Herbrand-Gödel (1934). La recursión se presentaba entonces como un candidato posible para caracterizar no tan sólo la noción de finitud propia de la metamatemática sino también la noción de efectividad reclamada para la solución del *Entscheidungsproblem*. La tesis según la cual las funciones recursivas ofrecerían el marco formal necesario para caracterizar los procedimientos de decisión finita no fue, sin embargo, la tesis sostenida por el mismo Gödel, sino que fue una propuesta que Church le hizo a Gödel en una carta personal en el año 1934, propuesta que por otra parte Gödel consideró como "completely unsatisfactory" (véase Davis 1982).

La tesis de Church no surgió, sin embargo, a partir del interés en las discusiones en fundamentos de la matemática, sino que el impulso inicial estuvo dado por el interés en la elaboración de un nuevo sistema lógico. Durante 1931 y 1934 Church había estado trabajando en la presentación de un nuevo sistema formal, un sistema lógico absolutamente sintáctico del cual se esperaba que fuera adecuado para representar la aritmética elemental mediante la noción central de función. El sistema entero resultó ser inconsistente. Esto fue un resultado demostrado por Kleene y Rosser; pese a ello pudo extraerse un subsistema consistente, el λ-cálculo, cuya potencialidad era todavía insospechada. Al interior de este nuevo sistema Church y Kleene desarrollaron el concepto de función λ-definible, estableciendo que una función es λ-definible si los valores de la función pueden ser calculados por un proceso de sustitución repetida. En un principio el abordaje de Church y Kleene sobre estos asuntos no estaba directamente relacionado con los problemas de metamatemática, pero gradualmente Church empezó a considerar la posibilidad de que la noción formal de λ-definibilidad capturara la idea informal de cálculo efectivo mediante la efectividad que parecía observarse en el proceso de sustitución, pues para Church resultaba intuitivamente claro que la sustitución se realiza de acuerdo a un algoritmo. Finalmente, en 1935 Church ataca directamente el problema del cálculo efectivo:

> The purpose of the present paper is to propose a definition of effective calculability which is thought to correspond satisfactorily to the somewhat vague intuitive notion in terms of which problems of this class are often stated, and to show by means of an example, that not every problem of this class is solvable. (Church 1965a, p. 90)

Church dio una solución negativa al problema lógico matemático de la decisión, encontrando un problema de lógica de primer orden que no es algorítmicamente soluble. Respecto del problema conceptual del cálculo efectivo, ofreció la primera tesis *oficial*, la tesis de Church (aunque él la llamó definición) pero no en términos de su formalismo, sino en términos de uno con mayor aceptación y trayectoria en los ámbitos fundacionales de la matemática:

> We now define the notion, already discussed, of an effectively calculable function of positive integers by identifying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a λ-definable function of positive integers) (Church 1965a, p. 100).

Kleene logró demostrar en 1936 la equivalencia formal del concepto de función recursiva de Herbrand-Gödel con el de función λ-definible y, en consecuencia, Church sostuvo dos argumentos de interés: lo que Gandy (1988, p. 72) llama el *argumento paso a paso* donde se estipula que los pasos de cualquier procedimiento efectivo deben ser recursivos (con lo cual cualquier aproximación a la noción de efectividad depende en última instancia de la noción de recursividad) y el *argumento por confluencia* según el cual la equivalencia entre la recursividad y la λ-definibilidad da mayor soporte a la tesis según la cual estos dos conceptos matemáticamente precisos caracterizan la noción general de cálculo efectivo.

Claramente, Church estaba en lo cierto, tenía la tesis correcta, en el sentido que ésta es la tesis que actualmente fundamenta gran parte de la teoría de la computabilidad, de acuerdo a ésta las funciones recursivas y λ-definibles son precisamente las funciones efectivamente calculables. Sin embargo, las razones para definir una noción vaga e intuitiva en términos de nociones formales precisas no resultaron ser tan decisivas ni convincentes; había allí un problema epistemológico: ¿cómo justificar la conexión entre el empleo intuitivo de una noción y su contraparte formal? Church mismo da cuenta de esta dificultad:

> This definition is thought to be justified by the considerations which follow, so far as positive justification can ever be obtained for the selection of a formal definition to correspond to an intuitive notion (Church 1965a, p. 100).

El problema de identificar lo intuitivo con un formalismo específico evidenció otra dimensión del problema conceptual, una dimensión epistemológica que sólo podría surgir con el desarrollo de las teorías formales y los intentos por conceptualizar el estudio metateórico de tales teorías. Es en este punto donde la tesis de Turing parece cobrar fuerzas y asumir una relevancia relativa con respecto a la tesis de Church; como ha observado Gandy (1988, p. 72), pese a los intentos de Church y Kleene de fundamentar su definición de cálculo efectivo, el argumento más contundente resultó ser finalmente el análisis de Turing.

1.2. El análisis de Turing

En 1936, el mismo año en que Church hizo pública su tesis y su resultado de indecidibilidad recursiva para la teoría formal de números (Church 1965b), Turing desarrolló independientemente otra propuesta para abordar el *Entscheidungsproblem* de Hilbert. Al igual que Church, Turing buscó un problema algorítmicamente insoluble del cual se siguiera la solución negativa al problema general de la decisión; pero su enfoque fue completamente distinto en cuanto a la apuesta conceptual y epistemológica. Su pregunta fundamental para caracterizar lo que sea un cálculo efectivo se dirigió a una cuestión mucho más elemental, e intuitiva, que las funciones recursivas y, sin lugar a dudas, que el lambda-cálculo: "What are the possible processes which can be carried out in computing a number?" (Turing 1965, p. 135).

El interés de Turing por los procesos de cálculo se focaliza en lo que él llama los *números computables*, a los cuales define como aquellos números reales cuyos decimales pueden ser calculados por medios finitos (Turing 1965, p. 116). Es claro que con esta definición Turing vinculó su trabajo a la propuesta metamatemática de Hilbert, pues su uso del término *finito* refiere al método y no a la longitud del proceso de determinar los dígitos, un método finito será aquel que involucre un algoritmo o un cálculo efectivo, o sea, un método que consiga dirimir un proceso de decisión. Con estas preocupaciones iniciales Turing se propuso esclarecer la noción vaga de cálculo efectivo en términos del análisis de un proceso que pueda ser desarrollado por un calculador humano dispuesto con lápiz, papel y un conjunto finito de instrucciones que rigen, de un modo determinista, cada paso del cálculo. Contando con un proceso de cálculo tal Turing restablece los ideales epistemológicos de la metamatemática finitista, de acuerdo a los cuales la aplicación del proceso predeterminado asegura que el cálculo se desarrolle en un número finito de pasos, que se arribe al resultado deseado si se aplica sin errores y que no sea necesario el entendimiento, el ingenio o la intuición por parte del humano que desarrolla el proceso.

Es de apreciar que en la determinación del tipo de proceso de cálculo que a Turing le interesa, además del concepto hilbertiano de finitud, aparece una segunda idea que es la de máquina, así establece que "a number is computable if its decimal can be written down by a machine" (Turing 1965, p. 116). Lo llamativo aquí es que Turing está utilizando un concepto de máquina absolutamente novedoso para su tiempo, pues no existía en su momento ninguna máquina que pudiera realizar esto mismo que Turing requería; si bien Babbage había diseñado el Motor Analítico alrededor de 1840, muchos acuerdan en que el trabajo de Turing de 1936 no estuvo influenciado en absoluto por las concepciones o la terminología de Babbage (véase Petzold 2008, p. 65; Copeland 2004, p. 29; Gandy 1988, p. 55). Pero incluso más llamativo que esta anticipación tecnológica es que la perspectiva técnica o ingenieril que el concepto de máquina introduce no parece ser directamente ventajoso para resolver el *Entscheidungsproblem* y, sin embargo, resulta ser el rasgo distintivo de la propuesta de Turing.

De acuerdo a lo dicho, los números computables que interesaron a Turing son números que un humano calcula por medios finitos (lo que Turing llama una computadora) o, equivalentemente, una máquina lo hace por los mismos medios: "we may compare a man in the process of computing a real number to a machine" (Turing 1965, p. 117). Esta es la apuesta central y característica del análisis de Turing: la asociación entre un cálculo humano efectivo y un cálculo mecánico, es decir, entre un humano siguiendo un método algorítmico y un cálculo que puede ser desarrollado por una *automatic-machine* (una máquina de Turing). A tal punto es relevante esta asociación de Turing que resulta ser, de hecho, una identificación; Church en una revisión del trabajo de Turing escribirá: "a human calculator, provided with pencil and paper and explicit instructions, can be regarded as a type of Turing machine" (Church 2013, p. 119).

En el trabajo de Turing, entonces, se encuentra el modelo de un proceso mecánico surgido a partir del análisis del cálculo humano regido por reglas. En este punto es preciso advertir que una máquina de Turing no es precisamente una máquina física, sino una idealización o modelo matemático de una persona que calcula siguiendo un método sistemático, el cual no demanda ni entendimiento ni ingenio. Como ha apuntado Gandy, el concepto de computabilidad de Turing es dependiente de su modelo mecánico de cálculo humano: "Turing's analysis makes no reference whatsoever to calculating machines. Turing machines appear as a result, as a codification, of his analysis of calculation by humans" (Gandy 1988, p. 77). Si bien en la descripción del proceso mecánico Turing importa una terminología fisicalista que hace pensar en una máquina calculadora, y en este sentido hay una ambigüedad en el uso de los términos *máquina* y *mecánico*, todas las restricciones de finitud impuestas sobre el proceso de cálculo están fundamentadas sobre la finitud de la memoria humana y de los estados mentales, de manera que parece ser claro que su análisis versa sobre un proceso de cálculo humano que puede ser descrito como mecánico en virtud de la efectividad del método aplicado. La tesis de Turing a este respecto será que un cálculo es efectivo si puede ser desarrollado mecánicamente (o realizado por una máquina de Turing) donde la utilización los términos *mecánico* y *máquina* refieren más a las condiciones sintácticas, formales y algorítmicas del ideal finitista de Hilbert que a la utilización más extendida del término en tanto mecanismo físico.

Ahora bien, vincular la idea metamatemática de lo efectivo con lo mecánico no es algo absolutamente novedoso del trabajo de Turing; más bien se trata de una idea intuitiva y ampliamente difundida en aquel contexto según la cual la naturaleza misma de un proceso de cálculo efectivo es que éste sea aplicado mecánicamente, esto es, un proceso regido por reglas y que no implique pensamiento. Con lo cual podemos sostener que Turing se sirvió de la identificación entre lo mecánico y lo efectivo latente en lo que caracterizamos como el planteo filosófico tras el *Entscheidungsproblem*: si la indecidibilidad deja de estar presente y la matemática se reduce a un cálculo efectivo, entonces podemos prescindir del pensamiento humano reemplazándolo por una *prescripción absolutamente mecánica*.

Siguiendo esta identificación no rigurosa entre lo efectivo y lo mecánico de la que ya se había dado cuenta en las discusiones fundacionales, Turing ofreció un modelo mecánico del cálculo humano efectivo y elaboró su concepto de computabilidad en términos de las posibles operaciones que puede realizar un computador humano si actúa mecánicamente. Como consecuencia, una forma de la tesis de Turing es: "the 'computable' numbers include all the numbers which would naturally be regarded as computable" (Turing 1965, p. 135), donde los números que pueden ser *naturalmente considerados como computables* no son otros sino aquellos para los cuales existe un método finito de cálculo, es decir, un algoritmo o un proceso que puede ser desarrollado por una máquina de Turing.

Lo que Turing demostró en su trabajo es que no todos los números reales son computables, arribó a este resultado mostrando que existen problemas de decisión muy simples que ninguna de sus máquinas puede resolver (por ejemplo, el problema de si otra máquina imprimirá en algún momento el dígito 0), de lo cual concluye "the *Entscheidungsproblem* cannot be solved" (Turing 1965, p. 148). Esto es, en esencia, el mismo resultado al cual ya había arribado Church.

Resolver el problema fundamental de la lógica matemática es, sin lugar a dudas uno de los resultados más interesantes a los cuales se puede arribar, mostrar además que distintos planteos dan una misma respuesta negativa y delimitan una misma clase de procesos efectivos o funciones efectivamente calculables fue la próxima meta de Turing. Así, en un apéndice a su artículo de 1936 Turing demostró que su concepto de computabilidad es formalmente equivalente a la λ-definibilidad de Church y a la recursividad de Herbrand Gödel, en el sentido que cada función lambda-definible es computable (por una máquina de Turing) y cada función computable (por una máquina de Turing) es general recursiva. Con el análisis del concepto de computabilidad y esta demostración de equivalencia Turing no sólo aportó un nuevo formalismo para tratar el problema lógico matemático de la decisión, sino que también ofreció las condiciones para generalizar el concepto de cálculo efectivo y convertirlo en un concepto estable y robusto; al mismo tiempo su análisis conceptual se convierte en un modelo sobre cómo abordar el problema epistemológico de identificar una noción intuitiva con un concepto formal (aunque claramente no clausuró el debate). Mientras que los intentos previos habían atacado directamente la pregunta matemática acerca de qué son las funciones computables, el enfoque de Turing se dirigió a una cuestión más elemental vinculada a los procesos básicos que llevamos a cabo los humanos cuando calculamos con lápiz y papel, así logró que su concepto de computabilidad, pese a la precisión matemática, conservara su simplicidad y aproximación a nuestros conceptos intuitivos sobre lo que por siglos hemos hecho cuando calculamos mediante un algoritmo.

2. La relevancia de la tesis de Turing

El *Entscheidungsproblem* de Hilbert, el problema fundamental de la lógica matemática, fue resuelto entre 1935 y 1936. Ya sea que abordemos el problema desde funciones recursivas, λ-cálculo o máquinas de Turing, la respuesta lógica matemática es la misma: no existe tal cálculo efectivo para dar respuesta a la validez, satisfabilidad o deductibilidad de una fórmula en LPO. La primera respuesta al problema lógico matemático vino por parte de Church, quien debió sostener una tesis respecto de qué es un cálculo efectivo. La tesis de Church, aunque publicada en 1935, fue sostenida al menos desde 1934 y aunque resultó ser correcta, parecía no ser lo suficientemente convincente. Turing aportó una segunda tesis, y esta sí fue considerada lo suficientemente satisfactoria como para abordar concluyentemente el problema del cálculo efectivo. Así Gödel refirió la definición de Turing como la *más satisfactoria* (Gödel 1995, p. 304) y aportando evidencias *más allá de toda duda* (Gödel 1995, p. 168) y Church apuntó que la identificación de la computabilidad de Turing con la noción de efectividad es *inmediatamente evidente* (Church 2013, p. 119). Si las tesis de Church y la de Turing son extensionalmente equivalentes, en el sentido que determinan una misma clase de funciones efectivamente calculables o procesos efectivos es válido preguntarnos ¿Por qué se dio este acuerdo entre los mismos partícipes de la historia en relación a la relevancia relativa de la tesis de Turing? ¿Por qué la tesis de Turing fue considerada lo suficientemente satisfactoria y convincente como para abordar concluyentemente el problema del cálculo efectivo?

Nuestra respuesta depende de la lectura que hemos dado del problema de la decisión de Hilbert y del modo en que consideramos las propuestas de Church y Turing. De acuerdo a nuestra interpretación, el *Entscheidungsproblem* de Hilbert planteó, al menos, tres problemas: el problema estrictamente lógico matemático de la decidibilidad formulado inicialmente para la lógica de primer orden y extendido luego a las teorías formales en general; el problema conceptual acerca de qué sea un cálculo efectivo junto al problema epistemológico (sobre el problema conceptual) de la identificación de una noción intuitiva con una noción formal; y, por último, la cuestión filosófica acerca de la mecanización de los procesos cognitivos en matemática y la posibilidad latente del reemplazo del pensamiento propiamente humano por procesos mecánicos o máquinas sin más. Nuestra respuesta frente a la pregunta recién planteada, acerca de las razones del acuerdo frente a la tesis de Turing, se enmarca en esta misma lectura que hemos dado sobre la complejidad que supone el planteo y abordaje del *Entscheidungsproblem*.

Si bien la propuesta de Church concluyó con una respuesta satisfactoria al problema lógico matemático, el problema conceptual no fue abordado en toda su amplitud, la noción de cálculo efectivo quedó limitada a los formalismos presentados y, por último, la cuestión filosófica no parece haber sido mayormente aclarada; de hecho, no fue siquiera planteada. La aproximación de Turing se distingue, en consecuencia, porque permitió dar una respuesta tanto al problema lógico matemático de la decidibilidad, como al problema conceptual y epistemológico acerca de qué sea un cálculo efectivo, al mismo tiempo que el empleo de la noción de máquina permitió dar cuenta, de un modo directo, del planteo filosófico sobre la mecanización de la inferencia.

La aproximación de Turing se distingue, y permite ser calificada como la más satisfactoria, porque abordó no un problema sino todo un núcleo problemático: ante el problema lógico matemático Turing demostró que no todos los números reales son computables, o equivalentemente, que no todas las funciones definibles son efectivamente computables; ante el problema conceptual sostuvo que un cálculo es efectivo si es susceptible de ser desarrollado mediante una proceso sujeto a ciertas restricciones de finitud (cuyo modelo es una máquina de Turing) y a esto lo fundamenta a su vez mediante un análisis que permite abordar el problema epistemológico, Turing ofrece un modelo mecánico de cálculo desarrollando el vínculo intuitivo entre cálculo efectivo y procedimiento mecánico; por último, el empleo de un modelo mecánico del cálculo humano permite abordar desde un marco formalmente preciso (las funciones mecánicamente computables) la cuestión filosófica respecto de la mecanización de los procesos inferenciales en matemática e incluso más allá de este ámbito, hacia la cognición en general. Muestras de esto último son, por ejemplo, los planteos computacionalistas en filosofía de la mente, el desarrollo de las ciencias cognitivas y las posibilidades de un nuevo mecanicismo sustentado ya no en modelos de máquinas particulares, sino en el concepto más general y abstracto de máquina universal de Turing (Webb 1980).

Finalmente, y como consecuencia del modelo mecánico aportado por Turing y su interacción (o ambigüedad) entre el uso abstracto y concreto del término *mecánico* (Gandy 1988, p. 74), el análisis de Turing posibilitó el surgimiento de una nueva ciencia, mitad abstracta, mitad concreta, híbrido entre formalismo y tecnología, a saber, las ciencias de la computación.

3. A modo de conclusión

Si bien la unificación extensional de los resultados obtenidos sobre el *Entscheidungsproblem* es la condición de posibilidad de que la noción de computación se haya constituido en una noción estable, cuya base se encuentra en lo que actualmente llamamos la tesis de Church-Turing, señalar las divergencias en las formulaciones del problema y su resolución puede revestir interés para comprender la relevancia relativa del abordaje de Turing. En tanto las ideas de recursividad y lamba-cálculo de

Gödel y Church se circunscribieron a un análisis formal sostenido por los logros lógico-matemáticos de su época y de allí se desprendió la idea de efectividad, Turing procedió de un modo inverso, partió de un análisis de los conceptos de finitud y efectividad y sobre ese análisis construyó y dio sentido a su formalismo; es en tal sentido que su trabajo puede ser entendido como la culminación de los intereses que motivaron el origen y desarrollo de la noción de efectividad en los fundamentos de las matemáticas, especialmente, como una culminación posible, y en muchos respectos exitosa, del programa finitista de Hilbert.

A pesar de que todas las construcciones formales de la noción intuitiva de cálculo efectivo que fueron ofrecidas en la década de 1930 no pueden ser más que modelos de algoritmos, y entre dichos modelos hay una equivalencia extensional, sostenemos que existen buenas razones para destacar las diferencias intensionales de las distintas propuestas y considerar el modelo de Turing como más persuasivo y fértil que los demás modelos contemporáneos.

Bibliografía

Church, A. (1965a), "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", en Davis, M. (ed.), *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Nueva York: Raven Press, pp. 88 -107.

Church, A. (1965b), "A Note on the *Entscheidungsproblem*", en Davis, M. (ed.), *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Nueva York: Raven Press, pp. 108-115.

Church, A. (2013) "Review: A.M. Turing, On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*", en Cooper, S.B. y J. van Leeuwen (eds.), *Alan Turing. His Work and Impact*, Amsterdam: Elsevier, p. 119.

Copeland, J. (ed.) (2004), *The Essential Turing*, Oxford: Oxford University Press.

Davis, M. (1982), "Why Gödel Didn't Have Church's Thesis", *Information and Control* 54(1): 3-24.

Gandy, R. (1988), "The Confluence of Ideas in 1936", en Herken, R. (ed.), *A Half-century Survey on The Universal Turing Machine*, Nueva York: Oxford Univesity Press, pp. 51-102.

Gödel, K. (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte fur Mathematik und Physik* 38: 173-198.

Gödel, K. (1995), *Kurt Gödel: Collected Works*, Vol. III, Nueva York: Oxford University Press.

Hilbert, D. (1902), "Mathematical Problems", *Bulletin of the American Mathematical Society* 8(10): 437-479.

Hilbert, D. (1967), "On the Infinite", en Van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel*, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 367-392.

Hilbert, D. (2005), "Axiomatic Thought", en Ewald, W. (ed.) (2005), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. 2, Oxford: Clarendon Press, pp. 1105-1115.

Hilbert, D. y W. Ackermann (1950), *The Principles of Mathematical Logic*, Nueva York: Chelsea Publishing Company.

Kleene, S.C. (1936), "λ-Definability and Recursiveness", *Duke Mathematical Journal* 2: 340-353.

Petzold, C. (2008), *The Annotated Turing. A Guide Tour through Alan Turing's Historic Paper on Computability and the Turing Machine*, Indianápolis: Wiler Publishing, Inc.

Turing, A. (1965), "On Computable Numbers, with an Application to the *Entscheidungsproblem*", en Davis, M. (ed.), *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Nueva York: Raven Press, pp. 115-151.

Webb, J. (1980), *Mechanism, Mentalism, and Metamathematics*, Dordrech: Reidel.